

3. Булеви функции. Пълнота. Съкратена ДНФ на БФ.

Дефиниция: Функциите $F_2 = \{f : J_2^n \rightarrow J_2 \mid n=1, 2, \dots\}$ наричаме **булеви (двоични)**. Булевите функции на n променливи означаваме с F_2^n .

Нека $F = \{f_0, f_1, \dots\} \subseteq F_2$. Нека $X = \{f, x, 0, 1, (,), <\text{запетая}>\}$.

По-нататък ще записваме думите $f\alpha, x\beta$, където $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^+$ като f_i, x_j , където α е двоичното представяне на числото i , β е двоичното представяне на числото j .

Дефиниция: Дефинираме индуктивно понятието **формула над множеството от функции F** :

База: За всяка функция $f_i \in F$ на n променливи, думата $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^*$ е формула над F .

Предположение: Нека $f_i \in F$ е функция на n променливи и $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in X^*$ са формули над F или променливи, т.е. от вида x_k .

Стъпка: Тогава думата $f_i(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in X^*$ е формула над F .

БФ с една променлива са 4 и са представени в следната таблица:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Имената на функциите са както следва:

- $f_0(x)$ – константата нула; означаваме я с 0
- $f_3(x)$ – константата единица; означаваме я с $\tilde{1}$
- $f_1(x) = x$ – идентитет
- $f_2(x) = \bar{x}$ – отрицание на x

БФ с две променливи са 16 и са представени в следната таблица:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Имената на функциите са както следва:

- $f_0(x, y)$ – константата нула, означаваме я с 0 . Приемаме същото означение, тъй като разликата е само в броя на променливите, а самата функция не зависи от тези променливи
- $f_{15}(x, y)$ – константата единица, означаваме я с $\tilde{1}$
- $f_3(x, y) = x$ – идентитетът (не зависи от y)
- $f_5(x, y) = y$ – идентитетът (не зависи от x)
- $f_{12}(x, y) = \bar{x}$ – отрицанието на x (не зависи от y)
- $f_{10}(x, y) = \bar{y}$ – отрицанието на y (не зависи от x)

Следващите функции от F_2^2 съществено зависят и от двете променливи; ще ги означаваме както следва:

- $f_1(x, y) = x \wedge y = xy$ – конюнкция на x и y ; функцията можем да разглеждаме като умножение по модул 2;
- $f_7(x, y) = x \vee y$ – дизюнкция на x и y ;
- $f_6(x, y) = x \oplus y$ – събиране по модул 2;
- $f_9(x, y) = x \equiv y$ – еквивалентност на x и y ;
- $f_{13}(x, y) = x \rightarrow y$ – импликация от x към y ;
- $f_{11}(x, y) = y \rightarrow x$ – импликация от y към x ;
- $f_{14}(x, y) = x | y$ – функция на Шефер;
- $f_8(x, y) = x \downarrow y$ – функция (стрелка) на Пирс;

Свойства:

Комутативност - $xy = yx, x \vee y = y \vee x, x \oplus y = y \oplus x$

Асоциативност - $(xy)z = x(yz), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

Дистрибутивност - $x(y \vee z) = xy \vee xz, x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z), x(y \oplus z) = xy \oplus xz$

Идемпотентност - $x \vee x = x, xx = x, x \oplus x = 0$

Свойства на отрицанието - $x\bar{x} = 0, x \vee \bar{x} = \tilde{1}, x \oplus x = \tilde{1}$

Свойства на константите - $x0 = 0, x\tilde{1} = x, x \vee 0 = x, x \vee \tilde{1} = \tilde{1}, x \oplus 0 = x, x \oplus \tilde{1} = \bar{x}$

Закон за двойното отрицание - $\bar{\bar{x}} = x$

Закони на Де Морган - $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}, \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$

Всяко едно от тези свойства може да се провери като директно сравним стълбовете на функциите отговарящи на двете формули. Ще използваме тези свойства за да покажем още две:

Слепване - нека $f \in F_2$; Тогава е в сила: $f x \vee f \bar{x} = f(x \vee \bar{x}) = f \tilde{1} = f$

Поглъщане - нека $f \in F_2$; Тогава е в сила: $fg \vee f = fg \vee f \tilde{1} = f(g \vee \tilde{1}) = f \tilde{1} = f$

Дефиниция: $C[F]$ ще означаваме множеството от всички двоични функции, съпоставени на формулите над F и ще го наричаме **затваряне** на F (относно суперпозицията).

Дефиниция: Множеството от функции $F \subseteq F_2$ е **пълно** в F_2 , ако $[F] = F_2$.

Дефиниция: Двоичната функция $f(x, \sigma) = x^\sigma$ дефинираме така: $x^\sigma = x$, ако $\sigma = 1$ и $x^\sigma = \bar{x}$, ако $\sigma = 0$.

Лема1: $x^\sigma = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$.

Доказателство: Достатъчно е да пресметнем стълба на x^σ и да видим, че $x^\sigma = x \equiv \sigma$, което доказва твърдението.

Дефиниция: Формули от вида $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$, където $i_j \neq i_s$ при $j \neq s$, $\sigma_j \in \{0, 1\}$, наричаме **елементарни конюнкции**.

Теорема (Разбиване на БФ по част от променливите): Нека са избрани i , $1 \leq i \leq n$ от променливите на функцията $f(x_1, \dots, x_n) \in F_2$. Без ограничение на общността, нека това са първите i променливи. Тогава

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\forall \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_i^{\sigma_i} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Доказателство: Нека $g(x_1, \dots, x_n)$ е функцията определена от дясната част на равенството. Да пресметнем стойностите на функциите f и g за произволен вектор $(a_1, \dots, a_n) \in J_2^n$. Вляво

получаваме $f(a_1, \dots, a_n)$. От Лема 1 следва, че от всички 2^i елементарни конюнкции $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_i^{\sigma_i}$, участващи в дясната част, само една има значение 1 – тази при която $\sigma_j = a_j$, $j = 1, 2, \dots, i$. Останалите елементарни конюнкции имат стойност 0 и анулират съответните членове на многократната дизюнкция. Така за стойността на дясната част получаваме:

$$\begin{aligned} g(a_1, a_2, \dots, a_n) &= a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_i^{a_i} f(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \cup \tilde{0} = \\ &= \tilde{1} f(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Следователно функциите от двете части на равенството съвпадат.

Теорема (Бул): Множеството $\{x \vee y, xy, \bar{x}\}$ е пълно.

Доказателство: Ако $f = 0$, можем да представим $f = x \bar{x}$ и тогава $f \in [\{x \vee y, xy, \bar{x}\}]$.

Нека $f \neq 0$. Тогава разлагаме $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по всичките n променливи и получаваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\forall \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

Ако $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$, съответният член в дясната част се анулира и може да не участва във формулата. Ако $f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1$, то $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$. Така получаваме: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\substack{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in \mathbf{J}_2^n \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}$, което е формула над $\{x \vee y, xy, \bar{x}\}$.

В означенията на доказателството, когато $f \neq 0$, формулата се нарича **съвършена дизюнктивна нормална форма** на f .

Дефиниция за импликанта и проста импликанта на БФ. Формулировка и доказателство на теоремата за премахване на букви от елементарна конюнкция.

Дефиниция: Нека $f \in F_2^n$ и $N_f = \{\alpha \mid \alpha \in J_2^n, f(\alpha) = 1\}$ тогава N_f наричаме **единично множество** на функцията f .

Лема: $N_{f \vee g} = N_f \cup N_g$, $N_{fg} = N_f \cap N_g$.

Теорема (За единичните множества на ел. Конюнкции и съдържащите се в тях букви) Нека K и K' са елементарни конюнкции на n променливи. $N_K \subseteq N_{K'} \Leftrightarrow K = K'K''$ т.е. всички букви на K' се съдържат в K и то със същите степени.

Доказателство:

1) Нека $K = K'K''$. Тогава $N_K = N_{K'K''} = N_{K'} \cap N_{K''} \Rightarrow N_K \subseteq N_{K'}$

2) Нека $N_K \subseteq N_{K'}$.

а. Ще покажем, че всяка буква, която участва в K и K' има една и съща степен. Да допуснем обратното, т.е. $K = x^\sigma K_1$, $K' = x^{\bar{\sigma}} K'_1$.

Тогава $N_K \cap N_{K'} = N_{KK'} = N_{x^\sigma x^{\bar{\sigma}} K_1 K'_1} = \emptyset \Rightarrow N_K = \emptyset$ - противоречие.

б. Да допуснем, че съществува буква y , която участва в K' , но не участва в K . Нека $K = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_k^{\sigma_k}$, $K' = y^\sigma K'_1$ и $y \neq x_j$. Построяваме вектор α , така че $x_1 = \sigma_1, \dots, x_k = \sigma_k$, $y = \bar{\sigma}$, а останалите променливи са произволни. Тогава $K(\alpha) = 1$ и $K'(\alpha) = 0$, т.е. $\alpha \in N_K$ и $\alpha \notin N_{K'}$ - противоречие.

От а, б $\Rightarrow$ Всички букви на K' се съдържат в K и то със същите степени.

Дефиниция: Нека $f \in F_2$. Елементарната конюнкция K наричаме **импликанта** на f , ако $N_K \subseteq N_f$.

Лесно може да се покаже, че ако K е импликанта на f , то $(K \rightarrow f) = \tilde{1}$, откъдето и наименованието импликанта.

Дефиниция: Импликантата K наричаме **проста**, ако не съществува импликанта K' такава, че $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$. От горната теорема това означава, че ако премахнем коя да е буква на K ще получим елементарна конюнкция, която не е импликанта на f .

Очевидно е, че във всяка дизюнктивна нормална форма на f участват елементарни конюнкции, които са импликанти на f .

Съкратена дизюнктивна нормална форма на БФ – дефиниция и съответни теореми (без доказателство).

Дефиниция: Нека φ е формула над $F \subseteq F_2$. Под **сложност** на φ ще разбираме броя на срещанията на букви на променливи във φ . Например: формулата $x \vee \bar{x} \vee \bar{z}$ има сложност 6.

Дефиниция: Под **минимална дизюнктивна нормална форма** на функцията $f \in F_2$ ще разбираме дизюнктивна нормална форма на f с минимална сложност.

Теорема: Всяка минимална дизюнктивна нормална форма на функцията $f \in F_2$ се състои само от прости импликанти.

Теорема: Нека $K_1, K_2, \dots, K_r$ са всички прости импликанти на $f \in F_2$, тогава $D = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_r$ е дизюнктивна нормална форма на f .

Дефиниция: Дизюнктивната нормална форма от всички прости импликанти на функцията $f \in F_2$ наричаме **съкратена дизюнктивна нормална форма** на f .

Алгоритъм на Куайн-МакКласки за построяване на СъкрДНФ (с доказателство на коректността).

Лема: ако xK и $\bar{x}K$ са импликанти на $f \in F_2$, то те не са прости;

Доказателство: От свойството сцепване имаме, че $xK \vee \bar{x}K = K$.

Имаме $N_K = N_{xK \vee \bar{x}K} = N_{xK} \cup N_{\bar{x}K} \subseteq N_f$; също от $N_{xK} \cup N_{\bar{x}K} \subseteq N_K$ имаме

$N_{xK} \subset N_K, N_{\bar{x}K} \subset N_K$, така че xK и $\bar{x}K$ не са прости импликанти на f . Междувременно покажахме, че ако xK и $\bar{x}K$ са импликанти на f , то K също е импликанта на f .

Алгоритъм на Куайн-МакКласки:

Нека $f(x_1, \dots, x_n) \in F_2^n$. Ще опишем алгоритъм за построяване на съкратената дизюнктивна нормална форма на f . За целта строим таблица на Куайн-МакКласки за f . Колоните на таблицата са номерирани с $(n), (n-1), \dots, (1)$, като в началото броят им е неопределен, т.е. r се определя от алгоритъма.

1. В колоната (n) записваме всички импликанти на f , които участват в съвършената дизюнктивна нормална форма на f . Нека $i = n$.
2. Строим колоната ($i - 1$) по следния начин - за всяка двойка импликанти K_1, K_2 от колона (i), такива, че $K_1 = xK$ и $K_2 = \bar{x}K$:
 - a. Отбелязваме K_1 и K_2 в колоната (i)
 - b. В колоната ($i - 1$) записваме K
3. Ако в колоната ($i - 1$) има поне една импликанта, то нека $l = i - 1$ и преминаваме към 2. В противен случай – край, като $r = i$.

Теорема (Куайн-МакКласки): Всички неотбелязани елементарни конюнкции в таблицата на Куайн-МакКласки и само те са простите импликанти на f .

Доказателство:

Стъпка 1: Ще покажем, че всяка импликанта на f е в таблицата. Нещо повече, ще покажем, че колоната (i) съдържа всички импликанти на f с i букви и само те.

С индукция по i ще покажем, че колоната (i) съдържа всички импликанти на f с i букви.

База: При $i = n$ всички импликанти на f с n букви и само те участват в съвършената дизюнктивна нормална форма на f , от която построихме колоната (n).

Предположение: Нека твърдението е изпълнено при $i = k \leq n$, т.е. колоната (k) съдържа всички импликанти на f с k букви и само те.

Стъпка: Да допуснем, че в колоната ($k-1$) липсва импликанта K на f с $k - 1 < n$ букви. Нека x е буква, която не участва в K , тогава xK и $\bar{x}K$ са импликанти на f с k букви и по индукционното предположение те участват в колоната (k). Това е противоречие, тъй като алгоритъмът на Куайн-МакКласки в този случай ще слепи xK и $\bar{x}K$ и ще постави K в колоната ($k-1$). Така всяка импликанта на f с ($k-1$) букви участва в колоната ($k-1$).

Заклучение: За $i = n, n-1, \dots, r$ колоната (i) съдържа всички импликанти на f с i букви.

В колоната (i) има само импликанти на f с i букви (това твърдение Манев каза, че не е необходимо да се доказва).

Стъпка 2: Всяка отбелязана импликанта K на f не е проста. Действително, по алгоритъма K има вида $K = x^o K_1$ и освен това $K' = \bar{x}^o K_1$ е импликанта на f в същата колона. По горната лема K не е проста.

Стъпка 3: Всяка неотбелязана импликанта K на f е проста.

Да допуснем обратното, т.е. неотбелязаната импликанта K на f с m букви не е проста. Тогава съществува буква x такава, че $K = x^o K_1$ и K_1 е импликанта на f с $m-1$ букви; тъй като K_1 е импликанта

на f , то $K' = x^{\bar{}} K_1$ (в K' степента на x трябва да е $\sigma + 1$) е импликанта на f с m букви; при това положение алгоритъмът би отбелязал K и K' , което е противоречие.

Пример: ($n = 4$) нека

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yzt \vee x\bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee x\bar{y}z\bar{t} \vee xy\bar{z}\bar{t} \vee xyzt;$$

Образуваме таблицата на Куайн-МакКласки, като елементарните конюнкции в колоната (4) сортираме по брой отрицания; това е удобно, тъй като слепването се извършва върху елементарни конюнкции, които се различават точно с 1 по брой отрицания;

S^* са отбелязаните елементарни конюнкции от алгоритъма.

(4)	(3)	(2)
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}^*$	$\bar{x}\bar{y}\bar{t}^*$	$\bar{y}\bar{t}$
$\bar{x}\bar{y}z\bar{t}^*$	$\bar{y}z\bar{t}^*$	
$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}^*$	$\bar{y}z\bar{t}^*$	
$x\bar{y}z\bar{t}^*$	$\bar{x}z\bar{t}$	
$x\bar{y}zt^*$	$x\bar{y}\bar{t}^*$	
$\bar{x}yz\bar{t}^*$	$x\bar{y}z$	
$\bar{x}yzt^*$	$xz\bar{t}$	
$xy\bar{z}\bar{t}^*$	$\bar{x}yz$	
$xyzt^*$	$yz\bar{t}$	
	xyt	

Така съкратената дизюнктивна нормална форма на f е:

$$f = \bar{x}z\bar{t} \vee x\bar{y}z \vee xz\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee yz\bar{t} \vee xyt \vee \bar{y}\bar{t}$$