

Графи. Дървета. Обхождане на графи.

Дефиниция: Нека $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ е крайно множество, елементите на което наричаме върхове, а $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ е крайно множество, елементите на което наричаме ребра. Функцията $f_G : E \rightarrow V \times V$, съпоставяща на всяко ребро наредена двойка от върхове, наричаме *краен ориентиран мултиграф*. Казваме още, че е зададен краен ориентиран мултиграф G с върхове V и ребра E и свързваща функция f_G и го означаваме с $G(V, E, f_G)$.

Дефиниция: Нека $G(V, E, f_G)$ е краен ориентиран мултиграф и функцията f_G е еднозначна, т.е. $f(e_i) \neq f(e_j)$, $i \neq j$. Тогава $G(V, E, f_G)$ наричаме *краен ориентиран граф*.

Дефиниция: Нека $G(V, E)$ е краен ориентиран граф, такъв че релацията $E \subseteq V \times V$ е рефлексивна и симетрична. В такъв случай $G(V, E)$ наричаме *краен неориентиран граф* или просто *граф*.

Забележка: Крайният неориентиран граф $G(V, E)$ можем да превърнем в *краен неориентиран мултиграф*, ако позволим повече от едно неориентирано ребро да свързва два върха от V , т.е. ако вместо множество $E \subseteq V \times V$ вземем мултимножество от елементите на $V \times V$.

Дефиниция: Върховете $v_i, v_j \in V$ на графа $G(V, E)$ наричаме *съседни*, ако $(v_i, v_j) \in E$. Ако графът е ориентиран казваме че v_i е *баща* на v_j , а v_j е *син* на v_i . Казваме че v_i и v_j са *краища* на реброто (v_i, v_j) . Броят $d(v_i)$ на ребрата в неориентирания граф $G(V, E)$, на които $v_i \in V$ е край наричаме *степен* на v_i . Броят $d^-(v_i)$ на ребрата в ориентирания граф $G(V, E)$, които започват от $v_i \in V$, наричаме *полустепен на изхода* на v_i , а броят на $d^+(v_i)$ на ребрата, които завършват във $v_i \in V$, наричаме *полустепен на входа* на v_i . Ако $d(v_i) = 0$ (v_i няма съседи), то ще наричаме v_i *изолиран*.

Дефиниция: Нека $G(V, E, f_G)$ е краен ориентиран мултиграф, $V' \subseteq V$. Нека $E' \subseteq E$ се състои от тези ребра, краищата на които са във V' , а $f'_G(e) = f_G(e)$, $\forall e \in E'$ (f'_G е рестрикцията на f_G върху E'). Тогава крайният ориентиран мултиграф $G'(V', E', f'_G)$ наричаме *подмултиграф* на G . Ако G е краен ориентиран или неориентиран граф, то $G'(V', E')$ наричаме *подграф* на G . И в двата случая казваме, че G' е *индуциран* от V' подграф на G .

Дефиниция: Последователността от върхове $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_l}$ на крайния ориентиран мултиграф наричаме *маршрут*, ако $\forall j = 0, 1, 2, \dots, l-1, \exists e \in E$ такава, че $f_G(e) = (v_{i_j}, v_{i_{j+1}})$. Числото l наричаме *дължина* на този маршрут. В случая, когато $v_{i_0} = v_{i_l}$ маршрута наричаме *контур*.

Дефиниция: Последователността от върхове $v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_l}$ на крайният неориентиран граф $G(V, E)$ наричаме *път* в G от v_{i_0} до v_{i_l} , ако $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}) \in E, \forall j$ и $v_{i_{j-1}} \neq v_{i_{j+1}}$. Броят l на ребрата наричаме *дължина* на пътя. Ще считаме че съществува тривиален път с дължина 0 от всеки връх v_i до v_i (така отчитаме наличието на примки в неориентирания граф, но им даваме тежест 0 при образуването на дължината на пътя).

За всеки краен неориентиран граф $G(V, E)$ дефинираме релацията $P_G \subseteq V \times V$, така $(v_i, v_j) \in P_G$ тогава и само тогава когато съществува път в G от v_i до v_j .

Теорема: Релацията P_G е релация на еквивалентност.

Дефиниция: Върховете от всеки клас на еквивалентност $V' \subseteq V$ на релацията P_G индуцират в $G(V, E)$ по един подграф, който наричаме *свързана компонента* на G . Графът $G(V, E)$ се нарича *свързан*, ако $\forall v_i, v_j \in V, \exists$ път в G от v_i до v_j , т.е. G има точно една свързана компонента.

Забележка: Дефиницията е приложима и за ориентирания случай, както и за мултиграф, със замяна на понятието път с маршрут.

Дървета

Дефиниция: Свързан граф $D(V, E)$ без цикли наричаме *дърво*. Несвързан граф без цикли – гора.

Дефиниция:

а) Графът $D(\{r\}, \{ \})$ наричаме *дърво с корен r* (*кореново дърво*). Единственият връх r е и единствен *лист* на това дърво.

б) Нека $D(V, E)$ е дърво с корен $r \in V$ и листа $l_1, l_2, \dots, l_r$. Нека $u \in V$ и $w \notin V$. Тогава $D'(V', E') = D'(V \cup \{w\}, E \cup \{(u, w)\})$ е също дърво с корен r . Ако $u = l_i, 1 \leq i \leq r$, тогава листа на D' са $l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, w, l_{i+1}, \dots, l_r$. В противен случай листа на D' са $l_1, l_2, \dots, l_r, w$

в) Няма други коренови дървета

Теорема: Всяко дърво с корен е дърво

Доказателство: 1. Всяко кореново дърво е свързан граф. а) $D(\{r\}, \{\})$ е очевидно свързан. б) Нека $D(V, E)$ е свързан. в) $D'(V', E') = D'(V \cup \{w\}, E \cup \{(u, w)\})$, също е свързан, защото между всеки два върха от V има път (от ИП), а от w до всеки друг връх има път с първо ребро (u, w) .

2 Кореновото дърво няма цикли. а) $D(\{r\}, \{\})$ очевидно няма цикли. б) Нека $D(V, E)$ няма цикли. в) Допускаме, че $D(V', E')$ има цикли. Тогава (u, w) участва в цикъл. Но $d(w) = 1 \Rightarrow$ противоречие. Сл. и $D(V', E')$ няма цикли.

Теорема: Нека $D(V, E)$ е дърво с корен r , тогава $|V| = |E| + 1$.

Доказателство: а) За $D(\{r\}, \{\})$ – очевидно, понеже $|V| = 1, |E| = 0$. б) Допускаме че за кореновото дърво $D(V, E)$ е в сила $|V| = |E| + 1$. в) За кореновото дърво $D'(V', E')$, $V' = V \cup \{w\}$, $E' = E \cup \{(r, w)\} \Rightarrow |V'| = |V| + 1$, $|E'| = |E| + 1 \Rightarrow |V'| - |E'| = |V| - |E| = 1 \Rightarrow |V'| = |E'| + 1$

Теорема: За всяко дърво $D(V, E)$, съществува единствен път между всеки два върха на D .

Теорема: Нека $D(V, E)$ е кореново дърво и $(v_i, v_j) \notin E$, тогава в $G(V, E \cup \{(v_i, v_j)\})$ има единствен цикъл.

Дефиниция: Нека $G(V, E)$ е граф, а $D(V, E')$, $E' \subseteq E$ е дърво. Тогава D наричаме *покриващо дърво* на G .

Теорема: Графът $G(V, E)$ има покриващо дърво $\Leftrightarrow$ когато е свързан.

Обхождане на графи

Обхождане в ширина: Съществено за тази алгоритмична схема е понятието *ниво на обхождане*, което представлява подмножеството на множеството от върхове на свързания граф $G(V, E)$. В резултат на обхождането в ширина, V се разбива на нива $L_0, L_1, \dots, L_k$ по следният начин)

- 1) Избираме начален връх i_0 на обхождането. $L_0 = \{i_0\}$ и обявяваме връх i_0 за „обходен“, и $i = 0$.
- 2) Ако $L_0 \cup L_1 \cup \dots \cup L_i = V$ прекратяваме обхождането, иначе преминаваме към стъпка 3).
- 3) Нека сме обходили върховете от нивата $L_0, L_1, \dots, L_i$.

$$L_{i+1} = \{v \mid v \text{ е „необходен” и } \exists w \in L_i, (v, w) \in E\}.$$

Обявяваме всички върхове $v \in L_{i+1}$ за „обходени”, $i = i + 1$ и преминаваме към стъпка 2).

Обхождане в дълбочина: За тази схема основни понятия са *текущ връх* t и *баща на върха* $t - p(t)$.

1) Избираме i_0 за начален връх, $t = i_0$, а $p(t)$ е неопределен.

2) Търсим „необходен” връх, който е съседен на t .

а) Ако има такъв връх v , тогава („стъпка напред”): $p(v) = t, t = v$ и обявяваме v за обходен. Преминаваме към стъпка 2).

б) Няма такъв връх:

- Ако $t \neq i_0$ (началният връх) („стъпка назад”) $t = p(t)$ и преминаваме към стъпка 2).

- Ако $t = i_0$ (началният връх) – край на обхождането.

Ойлерови обхождания: Път в свързан мултиграф $G(V, E)$, който минава еднократно през всяко ребро на мултиграфа, наричаме *Ойлеров път*. Ако Ойлеровият път има начало и край, които съвпадат то тогава той се нарича *Ойлеров цикъл*. Мултиграф, ребрата, на който образуват Ойлеров цикъл наричаме Ойлеров граф.

Теорема (Л. Ойлер): Свързаният мултиграф $G(V, E)$ е Ойлеров $\Leftrightarrow$ всеки връх на G е с четна степен.

Доказателство:

$\Rightarrow$) Нека ребрата на $G(V, E)$ образуват Ойлеров цикъл, тогава всеки връх има четна степен, понеже при обхождане на мултиграфа по Ойлеровия цикъл, на всяко ребро, „влизащ” във v_i съответства „излизащ” такова (различно от първото, според дефиницията за път), а цикълът съдържа всички ребра точно по един път.

$\Leftarrow$) Нека мултиграфът $G(V, E)$ е свързан и такъв, че всеки връх има четна степен. Ще опишем процедура която построява Ойлеров цикъл като използва всички ребра от графа точно по един път.

1) Нека r е произволен връх в мултиграфа. Обявяваме го за текущ t .

2) Докато е възможно, строим път по следното правило, от върха t , в който се намираме, преминаваме към някой съседен връх v по „необходено”

ребро. Използваното ребро обявяваме за „обходено“ а върхът v за текущ ($t = v$).

Нека да допуснем че когато правилото от тази стъпка не е приложимо то $t \neq r$. Тогава ще се окаже че степента на t е нечетна (ние сме във връх от който не можем да продължим), тъй като когато сме влезли за последно във t сме обявили реброто за „обходено“, а при предишни пъти когато сме минавали през този връх сме отбелязвали като обходени по 2 негови ребра – противоречие с четността на степените на върховете. Следователно когато 2) приключи то $t = r$ и всички на този етап обходени ребра образуват цикъл C .

3) Ако цикълът C съдържа всички ребра – край на обхождането. Построен е Ойлеровият цикъл C .

4) Вече имаме цикъл с начало и край r , но имаме оставащи ребра, които образуват цикли. Трябва да включим тези цикли в нашият цикъл C)

Ако премахнем всички „посетени“ ребра от мултиграфа $G(V, E)$, то отново в графа $G(V, E)$ всички върхове са с четна степен. Търсим такъв връх r' в намерения вече сикъл C , от който излиза поне едно необходимо ребро. Ако допуснем че няма такъв връх, и не всички ребра са обходени, ще получим противоречие със свързаността на мултиграфа. Преминаваме към стъпка 2) с начален връх $r = r'$ и построяваме нов цикъл C' . Разширяваме C с C' във върха r' и преминаваме към стъпка 3).

Следствие: Свързаният мултиграф $G(V, E)$ има Ойлеров път $\Leftrightarrow$ когато точно два върха са с нечетна степен.