

18. Синтаксис и семантика на термовете и формулите на предикатното смятане от първи ред. Унификация.

Дефиниция: Език на предикатното смятане от I ред наричаме език L , изграден от следните части :

- I. Логически символи :
 - a. Индивидни променливи – изброимо множество $Var = \{ x_0, x_1, \dots \}$
 - b. Булеви (съждителни) връзки : $\neg, \&, \vee, \implies, \iff$
 - c. Квантори : $\forall, \exists$
 - d. Помощни символи : $() ,$
- II. Нелогични символи :
 - a. Индивидни константи : $Const (c, d, e)$
 - b. Предикатни символи : $Pred$
 $p \in Pred, \#(p) > 0$ – ариост на функционалния символ p , ест. число
 - c. Функционални символи : $Func$
 $f \in Func, \#(f) > 0$ – ариост на функционалния символ f , ест. число

Дефиниция: Нека L е език на предикатно смятане от I ред. Множество от термове в езика L , τ_L , дефинираме индуктивно :

- индивидните константи са термове
- индивидните променливи са термове
- ако $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, $f \in Func_L, \#(f) = n$, то $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ също е терм

С $Var[\tau]$ означаваме множеството от индивидни променливи, участващи в терма τ . Ако $Var[\tau] = \emptyset$, то наричаме τ **затворен терм**. С τ_L^{cl} означаваме множеството от всички затворени термове в L .

Пример: Езикът на Пеановата аритметика L_{PA} :

1. 0 – индивидна константа
2. $+, \cdot, s$ – функционални символи
 $\#(+)=2, \#(\cdot)=2, \#(s)=1$ (прибавяне на единица)
3. $<, \doteq$ – предикатни символи
 $\#(<)=2, \#(\doteq)=2$

Термове в L_{PA} : $0, x, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), +(s(0), x), \cdot+(s(0), x), s(0))$.

Дефиниция: Думите от вида $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$, където $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, $p \in Pred_L, \#(p) = n$, наричаме **атомарни формули**.

Дефиниция: Множеството от предикатни формули F_L на езика L дефинираме индуктивно :

- атомарните формули са предикатни формули
- ако φ и ψ са предикатни формули, то $\neg\varphi, \varphi \implies \psi, \varphi \iff \psi, \varphi \& \psi, \varphi \vee \psi$ също са предикатни формули
- ако x е индивидна променлива, а φ е предикатна формула, то $\exists x \varphi$ и $\forall x \varphi$ също са предикатни формули

Пример: в $L_{PA} : \forall x (\neg(0, 0))$

$$\forall x (\neg \rightarrow(x, 0) \Rightarrow \exists y (\neg(x, s(0))))$$

Дефиниция: Субституция наричаме крайно множество от вида $\sigma = \{ x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n \}$, където $x_1, \dots, x_n$ са различни индивидуни променливи, а $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, така че $\tau_i \neq x_i$ за всяко i . ($i \Leftarrow \emptyset$ – специална субституция)

Дефиниция: Нека E е множество от термове, а σ е субституция. Казваме, че σ е **унификатор** за E , ако всеки път, когато τ_1 и $\tau_2 \in E$, то $\tau_1\sigma = \tau_2\sigma$. В такъв случай казваме, че E е **унифицируемо**.

Дефиниция: Нека E е множество от термове. Нека σ е унификатор за E . Казваме, че σ е **най-общ унификатор (НОУ)** за E , ако всеки път, когато ξ е унификатор на E , то съществува субституция η , така че $\xi = \sigma\eta$.

Алгоритъм за намиране на НОУ на крайно множество от термове

Нека E е множество от термове, $|E| \geq 2$, $|E| < \infty$.

Алгоритъм на най-левите различия :

Позицията i наричаме **позиция на най-левите различия**, ако съществуват поне 2 терма с различни символи на тази позиция, а за всяка друга позиция $j < i \rightarrow$ символите на j -та позиция са едни и същи във всички термове.

Множество на най-левите различия за $E = \{ \tau_1, \dots, \tau_n \}$ $DS(E)$ наричаме съвкупност от термове $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, такива, че α_k е подтерм на τ_k , заличаващ от позицията i на най-ляво различие. Дефиницията е коректна (т.е. $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ са наистина термове), т.к. от теоремата за еднозначен синтактичен анализ следва, че на i -та позиция стои индивидуна константа, индивидуна променлива или функционален символ.

$$E_0 = E, \sigma_0 = i, i = 0$$

докато ($0 = 0$)

ако $|E_i\sigma_i| = 1$, то $\sigma = \sigma_0\sigma_1 \dots \sigma_i$ е НОУ за $E \Rightarrow$ СТОП

иначе ако няма индивидуна променлива $x \in DS(E_i\sigma_i)$ и терм $\tau \in DS(E_i\sigma_i)$, така че $x \notin \text{Var}[\tau]$, то E не е унифицируемо $\Rightarrow$ СТОП

иначе избираме индивидуна променлива $x_{i+1} \in DS(E_i\sigma_i)$ и терм

$$\tau_{i+1} \in DS(E_i\sigma_i), x_{i+1} \notin \text{Var}[\tau_{i+1}], \text{ пол. } \sigma_{i+1} = \{ x_{i+1}/\tau_{i+1} \}, E_{i+1} = E_i\sigma_i, i++$$

Алгоритъмът е с експоненциална сложност, но за достатъчно малки множества работи по-добре от съществуващите линейни алгоритми, т.к. при последните има много големи константи.

Семантика на термовете и формулите в структура за L

Дефиниция: Структура за езика L наричаме наредената двойка $\mathcal{A} = \langle A, \mathbb{I} \rangle$, където

- $A \neq \emptyset$ – универсум – светът на обектите, за които говорим
- $\mathbb{I}$ – интерпретация на нелогическите символи от езика L в структурата $\mathcal{A}$
 - ако $c \in \text{Const}_L$, $\mathbb{I}(c) \in A$ (озн. $c^{\mathcal{A}}$)
 - ако $p \in \text{Pred}_L$, $\#(p) = n$, то $\mathbb{I}(p) \subseteq A^n$ (озн. $p^{\mathcal{A}}$)
 - ако $f \in \text{Func}_L$, $\#(f) = n$, то $\mathbb{I}(f) : A^n \rightarrow A$ (озн. $f^{\mathcal{A}}$)

Дефиниция: Оценка на индивидните променливи в структурата $\mathcal{A}$ наричаме изображението $\nu : \text{Var} \rightarrow A$.

Дефиниция: Дефинираме стойност на терм τ в структурата $\mathcal{A}$ при дадена оценка ν на индивидните променливи, $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[\nu]$, така :

- ако $\tau = x \in \text{Var}$, то $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \nu(x)$
- ако $\tau = c \in \text{Const}$, то $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[\nu] = c^{\mathcal{A}}$
- ако $\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$, $f \in \text{Func}$, $\tau_1, \dots, \tau_n$ – термове,
 $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[\nu] = f^{\mathcal{A}}(\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[\nu], \dots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[\nu])$

Дефиниция: Дефинираме стойност на предикатна формула $\varphi \in F_L$ в структурата $\mathcal{A}$ при дадена оценка на индивидните променливи ν , $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] \in \{И, Л\}$

- φ е атомарна, т.е. $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n)$
 $\|p(\tau_1, \dots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[\nu] = И \leftrightarrow \langle \|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[\nu], \dots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[\nu] \rangle \in p^{\mathcal{A}}$
- $\varphi = \neg\varphi_1$
 $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \mathcal{H}_{\neg}(\|\varphi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu])$
- $\varphi = \psi_1 \sigma \psi_2$, $\sigma \in \{ \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow \}$
 $\|\psi_1 \sigma \psi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu] = \mathcal{H}_{\sigma}(\|\psi_1\|^{\mathcal{A}}[\nu], \|\psi_2\|^{\mathcal{A}}[\nu])$
- $\varphi = \forall x \psi$
 $\|\forall x \psi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = И \leftrightarrow$ за всеки елемент $a \in A$, $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_a^x] = И$, където
 $\nu_a^x(y) \Leftarrow \begin{cases} \nu(y), & \text{ако } y \neq x \\ a, & \text{ако } y = x \end{cases}$ – модифицирана оценка на x в точката a
- $\varphi = \exists x \psi$
 $\|\exists x \psi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = И \leftrightarrow$ съществува елемент $a \in A$, $\|\psi\|^{\mathcal{A}}[\nu_a^x] = И$

Ако $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[\nu] = И \Leftarrow \mathcal{A} \models_{\nu} \varphi$.

Дефиниция: Нека Γ е множество от предикатни формули. Казваме, че Γ е **изпълнимо**, ако съществува структура $\mathcal{A}$ и оценка ν , така че за всяко $\varphi \in \Gamma$: $\mathcal{A} \models_{\nu} \varphi$.

Дефиниция: Една предикатна формула φ е **вярна** в структурата $\mathcal{A}$, ако за всяка оценка ν в $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models_{\nu} \varphi$. Означаваме $\mathcal{A} \models \varphi$.

Дефиниция: Нека Γ е множество от предикатни формули. Казваме, че структурата $\mathcal{A}$ е **модел** за Γ , $\mathcal{A} \models \Gamma$, ако за всяко $\varphi \in \Gamma$, $\mathcal{A} \models \varphi$.

Дефиниция: Булева интерпретация наричаме изображението $\mathbb{I} : \{P_1, P_2, \dots\} \rightarrow \{И, Л\}$.

Дефиниция: Казваме, че съждителна формула φ е вярна при булева интерпретация $\mathbb{I}$, ако $\|\varphi\|^{\mathbb{I}} = И \Leftarrow \mathbb{I} \models \varphi$.

Дефиниция: Нека Γ е множество от съждителни формули, $\mathbb{I}$ е булева интерпретация. Казваме, че $\mathbb{I}$ е модел на Γ , $\mathbb{I} \models \Gamma$, ако за всяко $\varphi \in \Gamma$, $\mathbb{I} \models \varphi$.

Дефиниция: Казваме, че множество от съждителни формули Γ е изпълнимо, ако съществува булева интерпретация $\mathbb{I}$, $\mathbb{I} \models \Gamma$.

Дефиниция: Нека L е език на предикатното смятане от I ред с поне една индивидуална константа и без формално равенство. Структура $\mathcal{H} = \langle H, \mathbb{I} \rangle$ ще наричаме **ербранова** за L ако :

1. $H = \tau_L^{cl}$
2. $c^{\mathcal{H}} = c, \forall c \in Const_L$
3. $f^{\mathcal{H}}(\tau_1, \dots, \tau_n) = f(\tau_1, \dots, \tau_n), \forall f \in Func_L$

Твърдение 1: Нека Δ е множество от затворени безкванторни формули. Тогава :

(i) Δ има модел $\leftrightarrow$ (ii) Δ е булево изпълнимо $\leftrightarrow$ (iii) Δ има ербранов модел.

Доказателство:

Ще покажем, че (i) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (iii) $\rightarrow$ (i).
тривиално

(i) $\rightarrow$ (ii). Нека Δ има модел $\mathcal{A}$. $\mathcal{A} \models \Delta$. Дефинираме булева интерпретация $\mathbb{I}_{\mathcal{A}}$:

$\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = И \leftrightarrow \mathcal{A} \models p(\tau_1, \dots, \tau_n)$. С индукция по построението на затворена безкванторна формула ще покажем, че :

(*) $\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\varphi) = И \leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi$

- $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n), \tau_1, \dots, \tau_n \in \tau_L^{cl}$
 $\mathcal{A} \models p(\tau_1, \dots, \tau_n) \leftrightarrow \mathcal{A} \models p(\tau_1, \dots, \tau_n) \leftrightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = И$

- $\varphi = \neg\psi$ и (*) е вярно за ψ
 $\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathcal{A} \models \neg\psi \leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi \leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi \leftrightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\psi) \neq И \leftrightarrow$
ИП

$\mathcal{H}_{\neg}(\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\psi)) = И \leftrightarrow \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\neg\psi) = И$

- $\varphi = \varphi_1 \sigma \varphi_2, \sigma \in \{ \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow \}$ и за φ_1 и φ_2 (*) е вярно

$\mathcal{A} \models \varphi \leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi_1 \sigma \varphi_2 \leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi_1 \sigma \varphi_2 \leftrightarrow$
ИП

$\mathcal{H}_{\sigma}(\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\varphi_1), \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\varphi_2)) = И \leftrightarrow \mathcal{H}_{\sigma}(\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\varphi_1), \mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\varphi_2)) = И \leftrightarrow$
ИП

$\mathbb{I}_{\mathcal{A}}(\varphi_1 \sigma \varphi_2) = И$

(ii) $\rightarrow$ (iii). Нека Δ е булево изпълнимо $\rightarrow$ съществува булева интерпретация $\mathbb{I}$,

за всяко $\varphi \in \Delta, \mathbb{I} \models \varphi$, т.е. $\mathbb{I}(\varphi) = И$. Дефинираме ербранова структура $\mathcal{H}_{\mathbb{I}}$:

$\langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle \in p^{\mathcal{H}_{\mathbb{I}}} \leftrightarrow \mathbb{I}(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = И$. С индукция относно построението на затворена безкванторна формула ще покажем, че :

(**) $\mathbb{I}(\varphi) = И \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{I}} \models \varphi$

- $\varphi = p(\tau_1, \dots, \tau_n), \tau_1, \dots, \tau_n \in \tau_L^{cl}$
 $\mathcal{H}_{\mathbb{I}} \models p(\tau_1, \dots, \tau_n) \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{I}} \models p(\tau_1, \dots, \tau_n) \leftrightarrow$
ИП

$\langle \tau_1 \parallel^{\mathcal{H}_{\mathbb{I}}} [v], \dots, \tau_n \parallel^{\mathcal{H}_{\mathbb{I}}} [v] \rangle \in p^{\mathcal{H}_{\mathbb{I}}} \leftrightarrow \langle \tau_1, \dots, \tau_n \rangle \in p^{\mathcal{H}_{\mathbb{I}}} \leftrightarrow$
 $\mathbb{I}(p(\tau_1, \dots, \tau_n)) = И$

- $\varphi = \neg\psi$ и (**) е вярно за ψ
 $\mathcal{H}_{\mathbb{I}} \models \neg\psi \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{I}} \models \neg\psi \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{I}} \not\models \psi \leftrightarrow \mathbb{I}(\psi) \neq И \leftrightarrow \mathcal{H}_{\neg}(\mathbb{I}(\psi)) = И \leftrightarrow$
ИП

$\mathbb{I}(\neg\psi) = И$

- $\varphi = \varphi_1 \sigma \varphi_2, \sigma \in \{ \&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow \}$ и за φ_1 и φ_2 (**) е вярно

$\mathcal{H}_{\mathbb{I}} \models \varphi_1 \sigma \varphi_2 \leftrightarrow \mathcal{H}_{\mathbb{I}} \models \varphi_1 \sigma \varphi_2 \leftrightarrow \mathcal{H}_{\sigma}(\mathbb{I}(\varphi_1), \mathbb{I}(\varphi_2)) = И \leftrightarrow$
ИП

$\mathcal{H}_{\sigma}(\mathbb{I}(\varphi_1), \mathbb{I}(\varphi_2)) \leftrightarrow \mathbb{I}(\varphi_1 \sigma \varphi_2) = И$

Дефиниция: Нека φ е затворена универсална формула, т.е. $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \Theta$, Θ – безкванторна и $\text{Var}^{\text{free}}[\Theta] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. **Затворен частен случай** на φ наричаме формула от вида $\Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$, където $\tau_1, \dots, \tau_n$ са затворени термове.

Дефиниция: $\text{CSi}(\varphi) \Leftrightarrow \{ \Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n] \mid \tau_1, \dots, \tau_n \text{ са затворени термове} \}$ (φ – предикатна формула, която е затворена и универсална)

Дефиниция: Нека Γ е множество от затворени универсални формули.

$$\text{CSi}(\Gamma) = \bigcup_{\varphi \in \Gamma} \text{CSi}(\varphi)$$

Твърдение 2: Нека Γ е множество от затворени универсални формули. Тогава :

(i) Γ има модел $\leftrightarrow$ (ii) $\text{CSi}(\Gamma)$ е булево изпълнимо $\leftrightarrow$ (iii) Γ има ербранов модел.

Доказателство:

Ще покажем, че (i) $\rightarrow$ (ii) $\rightarrow$ (iii) $\rightarrow$ (i).
тривиално

(i) $\rightarrow$ (ii). Нека Γ има модел $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \Gamma$. Нека $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \Theta \in \Gamma$, Θ – безкванторна, $\text{Var}^{\text{free}}[\Theta] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Нека $\psi = \Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$, където $\tau_1, \dots, \tau_n$ са затворени термове, т.е. $\psi \in \text{CSi}(\varphi) \subseteq \text{CSi}(\Gamma)$.

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \Theta \Rightarrow \forall x_2 \dots \forall x_n \Theta[x_1/\tau_1]$$

$$\mathcal{A} \models \forall x_2 \dots \forall x_n \Theta[x_1/\tau_1] \Rightarrow \forall x_3 \dots \forall x_n \Theta[x_1/\tau_1][x_2/\tau_2]$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{A} \models \forall x_n \Theta[x_1/\tau_1] \dots [x_{n-1}/\tau_{n-1}] \Rightarrow \Theta[x_1/\tau_1] \dots [x_n/\tau_n]$$

$$\text{Т.к. } \mathcal{A} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \Theta, \text{ то } \mathcal{A} \models \Theta[x_1/\tau_1] \dots [x_n/\tau_n]$$

И т.к. $\tau_1, \dots, \tau_n$ са затворени термове, то $\Theta[x_1/\tau_1] \dots [x_n/\tau_n] = \Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$

Следователно $\mathcal{A} \models \Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$. Т.к. ν е произволна оценка, то

$\mathcal{A} \models \Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$. Т.к. $\tau_1, \dots, \tau_n$ са произволни затворени термове, то $\mathcal{A} \models \text{CSi}(\varphi)$.
Т.к. φ е произволна формула от Γ , то $\mathcal{A} \models \text{CSi}(\Gamma)$.

От **Твърдение 1** $\Rightarrow \text{CSi}(\Gamma)$ е булево изпълнимо.

(ii) $\rightarrow$ (iii). Нека $\text{CSi}(\Gamma)$ е булево изпълнимо. Тогава от **Твърдение 1** $\rightarrow \text{CSi}(\Gamma)$ има ербранов модел $\mathcal{H}$. Твърдим, че $\mathcal{H} \models \Gamma$. Нека $\varphi \in \Gamma$, т.е. $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \Theta$, Θ – безкванторна, $\text{Var}^{\text{free}}[\Theta] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. Нека ν е оценка в $\mathcal{H}$. Тогава $\mathcal{H} \models \varphi \leftrightarrow$ за всяко

$a_1, \dots, a_n \in |\mathcal{H}|$ (универсума на $\mathcal{H}$):

$$\mathcal{H} \models \Theta$$

$$(\dots ((\nu_{a_1}^{x_1})_{a_2}^{x_2}) \dots)_{a_n}^{x_n}$$

$$(\dots ((\nu_{a_1}^{x_1})_{a_2}^{x_2}) \dots)_{a_n}^{x_n} = \nu_{a_1 a_2 \dots a_n}^{x_1 x_2 \dots x_n}$$

$$\nu_{a_1 a_2 \dots a_n}^{x_1 x_2 \dots x_n}(x_i) = a_i \Leftarrow \tau_i = \parallel \tau_i \parallel^{\mathcal{H}} [\nu]$$

$$\text{Тогава } \mathcal{H} \models \Theta \leftrightarrow \mathcal{H} \models \Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$$

Т.к. $\Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n] \in \text{CSi}(\Gamma)$ и $\mathcal{H} \models \text{CSi}(\Gamma)$, следва, че $\mathcal{H} \models \Theta[x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n]$.

Следователно $\mathcal{H} \models \Theta$. Т.к. $a_1, \dots, a_n$ са произволни, то $\mathcal{H} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \Theta$. И ν е

произволна следователно $\mathcal{H} \models \forall x_1 \dots \forall x_n \Theta$. От φ – произволна, следва, че $\mathcal{H} \models \Gamma$.