

1. Основни комбинаторни принципи и формули.

Рекурентни отношения.

Основни принципи на изброителната комбинаторика.

Теорема (принцип на Дирихле): Нека A и B са крайни множества, $|A| = m$, $|B| = n$, $m > n$. Тогава за всяка тотална функция $f: A \rightarrow B$ съществуват $a_i \neq a_j \in A$ такива, че $f(a_i) = f(a_j)$.

Теорема (принцип на биекцията): Нека X и Y са крайни множества, $|X| = m$, $|Y| = n$. Тогава съществува биекция $f: X \rightarrow Y \Leftrightarrow m = n$.

Доказателство: Нека $m = n$; тогава можем да напишем $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $Y = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ и да дефинираме естествената биекция $f(a_i) = b_i$ за всяко $i \in I_n$.

Нека съществува биекция $f: X \rightarrow Y$; ако допуснем, че $m > n$, то по принципа на Дирихле $\Rightarrow$ съществуват $a, b \in X$, $a \neq b$ такива, че $f(a) = f(b)$ – противоречие с еднозначността на биекцията f .

Аналогично, ако допуснем $n < m$ ще достигнем до противоречие с еднозначността на биекцията f^{-1} и така $m = n$.

Теорема (принцип на събирането): Нека A е крайно множество, а $R = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ е разбиване на A . Тогава $|A| = \sum_{i=1}^k |S_i|$.

Теорема (принцип за изваждането): Нека A е крайно множество, $A' \subseteq A$, $A'' \subseteq A$, $A \setminus A' = A''$. Тогава $|A'| = |A| - |A''|$;

Теорема (принцип на умножението): Нека A и B са крайни множества, $|A| = n$, $|B| = m$. Тогава $|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m$;

Доказателство:

Ако $n = 0$, то $A = \emptyset \Rightarrow A \times B = \emptyset \Rightarrow |A \times B| = 0 = m \cdot 0$;

Ако $m = 0$, то $B = \emptyset \Rightarrow A \times B = \emptyset \Rightarrow |A \times B| = 0 = 0 \cdot n$;

Нека $m \neq 0$, $n \neq 0$, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

Нека за всяко $a_k \in A$ дефинираме $S_k = \{(a_k, b) \mid b \in B\}$ и нека $R = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$.

От очевидната биекция $f: A \rightarrow R$, $f(a_i) = S_i \Rightarrow |R| = n$.

За всяко S_k дефинираме биекцията $g_k: S_k \rightarrow B$, $g_k((a_k, b)) = b$.

Тогава за всяко S_i имаме $|S_i| = |B| = m$.

От друга страна R е разбиване на $A \times B$ защото:

1. За всяко $k \in I_n$, имаме $|S_k| = m \neq 0 \Rightarrow S_k \neq \emptyset$
2. За всеки $i, j \in I_n$ от $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset$
3. $A \times B = \bigcup_{k \in I_n} S_k$

От принципа за събирането получаваме: $|A \times B| = \sum_{i \in I_n} |S_i| = \sum_{i \in I_n} m = n \cdot m = |A| \cdot |B|;$

Теорема (принцип на деленето): Нека A и B са крайни множества. Ако $B \neq \emptyset$, то $\frac{|A \times B|}{|B|} = |A|.$

Теорема (принцип на включването и изключването): Нека A е крайно множество и $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A$. Тогава:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_n}| &= |A| - \sum_{i \in I_n} |A_i| + \sum_{\substack{i, j \in I_n \\ i \neq j}} |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{i, j, k \in I_n \\ i \neq j, j \neq k, k \neq i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \\ &+ \dots + (-1)^n \cdot |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

Основни комбинаторни конфигурации.

Признаците, по които ще подредим комбинаторните конфигурации са наредба и повтаряне на елементите. Ще използваме като дадено крайно множество $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $|A| = n > 0$.

Конфигурации с наредба и с повтаряне на елементите: нека m е цяло число, $m > 0$. Ще означаваме с $K_{n, n}(n, m)$ множеството, в който всеки елемент е наредена m -торка с елементи от A . Тогава $K_{n, n}(n, m) = A^m$ и от принципа на умножението $\Rightarrow |K_{n, n}(n, m)| = |A^m| = |A|^m = n^m$.

Конфигурации с наредба и без повтаряне: нека $1 \leq m \leq n$. Ще означаваме с $K_n(n, m)$ множеството от всички наредени m -торки с елементи от A , в които всеки елемент може да участва най-много 1 път. Очевидно при $m = 1$ имаме $K_n(n, 1) = n$; при $m = 2$ на първо място в m -торката може да се постави който да е елемент на A по n начина и на второ място може да се постави който да е елемент на A без първия избран, т.е. по $n-1$ начина. От принципа на умножението получаваме, че $K_n(n, 2) = n \cdot (n-1)$. Разсъждавайки индуктивно по m получаваме: $K_n(n, m) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)$.

Конфигурациите с наредба и без повторение $K_n(n, m)$ се наричат **вариации** от n елемента m -ти клас, техният брой се означава с V_n^m . Така получихме: $V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

При $m = n$ вариациите от n елемента n -ти клас са точно всевъзможните наредби на тези елементи и се наричат **пермутации**, техният брой се означава с P_n ; от горния резултат получаваме $P_n = n!$;

Конфигурации без наредба и без повторение: нека $0 \leq m \leq n$. Означаваме с $K(n, m)$ множеството от всички ненаредени m -торки с елементи от A . Всъщност $K(n, m)$ са точно подмножествата на A с по m елемента. За да пресметнем техният брой ще използваме принципа на деленето – разглеждаме наредените m -торки $K_n(n, m)$. Всяка ненаредена m -торка участва в $K_n(n, m)$ по толкова пъти по колкото можем да наредим нейните елементи, т.е. по $m!$ пъти. В такъв случай

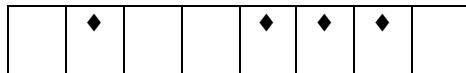
$$\text{имаме: } |K(n, m)| = \frac{|K_n(n, m)|}{m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Конфигурациите без наредба и без повторение $K(n, m)$ наричаме още **комбинации** от n -елемента m -ти клас. Техният брой се означава още с C_n^m . Така получихме: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

изразът $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ се означава още с $\binom{n}{m}$ и се нарича **биномен коефициент**;

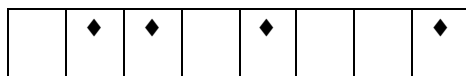
Конфигурации без наредба и с повторение: нека $0 \leq m \leq n$. С $K_n(n, m)$ означаваме множеството от всички ненаредени m -торки, като всеки елемент може да присъства произволен брой пъти. Нека $m \geq 1$. Разглеждаме множество от $m+n-1$ различни кутии и един произволен елемент $\diamond \notin A$. Нека е даден произволен елемент от $K_n(n, m)$. Започвайки отляво оставяме толкова празни кутии, колкото пъти a_1 присъства в m -торката и в следващата кутия поставяме $\diamond$. По-нататък оставяме толкова празни кутии, колкото пъти a_2 присъства в m -торката и в следващата кутия поставяме $\diamond$ и т.н. оставяме толкова празни кутии, колкото пъти a_{n-1} присъства в m -торката и в следващата кутия поставяме $\diamond$ и броят на оставащите кутии е точно толкова, колкото a_n присъства в ненаредената m -торка. Ясно е, че по този начин еднозначно съпоставяме на всяка ненаредена m -торка разпределение на $n-1$ знака $\diamond$ в различните $m+n-1$ кутии.

Например: при $n = 5$, $m = 4$ на конфигурацията $[a_1, a_2, a_2, a_5]$ съответства разпределението:



Обратно на всяко разпределение на $n-1$ знака $\diamond$ в различните $m+n-1$ кутии съответства точно един елемент от $K_n(n, m)$ – елементът a_1 вземаме толкова пъти, колкото празни кутии има от най-лявата кутия до първата, в която има знак $\diamond$, a_2 вземаме толкова пъти, колкото празни кутии има между първата и втората кутия със знак $\diamond$ и т.н. елементът a_n вземаме толкова пъти, колкото празни кутии има между последната кутия със знак $\diamond$ и най-дясната кутия.

Например: при $n = 5$, $m = 4$ разпределението:



Съответства на ненаредената m -торка с повторение: $[a_1, a_3, a_4, a_4]$; сега по принципа на биекцията, броят на елементите на множеството $K_n(n, m)$ е броят на всевъзможните разпределения на $n-1$

предмета в $m+n-1$ различни кутии, т.е. $|K_n(n, m)| = \binom{m+n-1}{n-1}$.

Ще изведем и формула за **пермутации с повторения**, т.е. броят $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$ на различните наредби на n неразличими елементи от k вида – n_1 от първия вид, n_2 от втория вид, ..., n_k от k -тия вид, $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Ясно е, че произволна пермутация на елементите от един вид не променя

пермутацията на всичките n , така че от формулата за пермутации и от принципа на деленето

$$(приложен k \text{ пъти}) \text{ получаваме } P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни отношения с константни коефициенти – хомогенни и нехомогенни.

Дефиниция: Нека редицата $\tilde{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ е такава, че $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$ са зададени явно и $a_{i+r} = c_1 a_{i+r-1} + c_2 a_{i+r-2} + \dots + c_r a_i$, $i=0, 1, 2, \dots$ за някакви константи c_j , $j=1, 2, \dots, r$. Равенството, определящо a_{i+r} като линейна функция на предхождащите r члена на редицата наричаме линейно рекурентно отношение от ред r .

За да е напълно определена една редица с линейно рекурентно отношение от ред r е необходимо да са зададени първите r члена на тази редица.

Теорема (за решаване на хомогенни рекурентни отношения): Нека редицата $\tilde{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ е зададена с линейното рекурентно отношение

$$a_0, a_1, \dots, a_{r-1} \\ a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r} = 0, n \geq r$$

и $t_1, t_2, \dots, t_s$ са различните комплексни корени на характеристичното уравнение

$x^r + c_1 x^{r-1} + \dots + c_{r-1} x + c_r = 0$ като t_i е с кратност k_i , $k_1 + k_2 + \dots + k_s = r$. Тогава $a_n = \sum_{i=1}^s P_i(n) t_i^n$, където $P_i(n)$ е полином на n от степен $< k_i$. Полиномите P_i имат общо r коефициента, които се определят еднозначно от първите r члена на редицата $\tilde{a}$.

Същата техника за решаване е приложима и към **нехомогенните линейни рекурентни отношения** от вида:

$$a_0, a_1, \dots, a_{r-1} \\ a_{i+r} = c_1 a_{i+r-1} + c_2 a_{i+r-2} + \dots + c_r a_i + b_1^n Q_1(n) + \dots + b_m^n Q_m(n), n \geq r$$

където b_j са различни една от друга константи, а $Q_j(n)$ – полином на n от степен $d_j - 1$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Достатъчно е да означим $t_{r+j} = b_j$, $j = 1, 2, \dots, m$ и да гледаме на него като на d_j кратен корен на

характеристичното уравнение. Тогава $a_n = \sum_{i=1}^{r+m} P_i(n) t_i^n$ като за намирането на коефициентите на полиномите $P_i(n)$, освен зададените r , ще трябва да бъдат изчислени с помощта на рекурентно отношение още $d_1 + d_2 + \dots + d_m$ члена на редицата.