Езици, автомати, изчислимост

Стефан Вътев[1]

10 юли 2015 г.

[1] ел. поща: stefanv@fmi.uni-sofia.bg

Съдържание

Глава 1

Увод

1.1 Съждително смятане

На англ. Propositional calculus

Съждителното смятане наподобява аритметичното смятане, като вместо аритметичните операции $+, -, \cdot, /$, имаме съждителни операции като $\neg, \wedge, \vee$. Например, $(p \vee q) \wedge \neg r$ е съждителен израз. Освен това, докато аритметичните променливи приемат стойности произволни числа, то съждителните променливи приемат само стойности **истина (1)** или **неистина (0)**.

Съждителен израз наричаме съвкупността от съждителни променливи $p, q, r, \ldots$, свързани със знаците за логически операции $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ и скоби, определящи реда на операциите.

Съждителни операции

- Отрицание $\neg$
- Дизюнкция $\vee$
- Конюнкция $\wedge$
- Импликация $\rightarrow$
- Еквивалентност $\leftrightarrow$

Ще използваме таблица за истинност за да определим стойностите на основните съждителни операции при всички възможни набори на стойностите на променливите.

p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$
0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1	1

Съждително верен (валиден) е този логически израз, който има верностна стойност **1** при всички възможни набори на стойностите на съждителните променливи в израза, т.е. стълбът на израза в таблицата за истинност трябва да съдържа само стойности **1**.

Два съждителни израза φ и ψ са **еквивалентни**, което означаваме $\varphi \equiv \psi$, ако са съставени от едни и същи съждителни променливи и двата израза имат едни и същи верностни стойности при всички комбинации от верностни стойности на променливите. С други думи, колоните на двата израза в съответните им таблици за истинност трябва да съвпадат. Така например, от горната таблица се вижда, че $p \to q \equiv \neg p \vee q$ и $p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$.

Съждителни закони

I) **Комутативен закон**

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

II) **Асоциативен закон**

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

III) **Дистрибутивен закон**

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

IV) **Закони на де Морган**

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q)$$

V) **Закон за контрапозицията**

$$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$$

VI) **Обобщен закон за контрапозицията**

$$(p \wedge q) \to r \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$$

VII) **Закон за изключеното трето**

$$p \vee \neg p \equiv \mathbf{1}$$

VIII) **Закон за силогизма (транзитивност)**

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r) \equiv \mathbf{1}$$

Лесно се проверява с таблиците за истинност, че законите са валидни.

1.2 Предикатно смятане

1.3 Доказателства на твърдения

Допускане на противното

Да приемем, че искаме да докажем, че свойството $P(x)$ е вярно за всяко естествено число. Един начин да направим това е следния:

- Допускаме, че съществува елемент n, за който $\neg P(n)$.
- Използвайки, че $\neg P(n)$ правим извод, от който следва факт, за който знаем, че винаги е лъжа. Това означава, че доказваме следното твърдение
$$\exists x \neg P(x) \to \mathbf{0}.$$
- Тогава можем да заключим, че $\forall x P(x)$, защото имаме следния извод:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x \neg P(x) \to \mathbf{0}}{\mathbf{1} \to \neg \exists x \neg P(x)}}{\neg \exists x \neg P(x)}}{\forall x P(x)}$$

Ще илюстрираме този метод като решим няколко прости задачи.

Задача 1. За всяко $a \in \mathbb{Z}$, ако a^2 е четно, то a е четно.

Док. Ние искаме да докажем твърдението P, където:

$$P \equiv (\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \to a \text{ е четно}].$$

Да допуснем противното, т.е. изпълнено е $\neg P$. Лесно се вижда, че

$\neg(\forall x)(A(x) \to B(x))$ е еквивалентно на $(\exists x)(A(x) \wedge \neg B(x))$

$$\neg P \leftrightarrow (\exists a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \wedge a \text{ не е четно}].$$

Да вземем едно такова нечетно a, за което a^2 е четно. Това означава, че $a = 2k + 1$, за някое $k \in \mathbb{Z}$, и

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

което очевидно е нечетно число. Но ние допуснахме, че a^2 е четно. Така достигаме до противоречие, следователно нашето допускане е грешно и

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[a^2 \text{ е четно } \to a \text{ е четно}].$$

$\square$

Задача 2. Докажете, $\sqrt{2}$ **не** е рационално число.

Док. Да допуснем, че $\sqrt{2}$ е рационално число. Тогава съществуват $a, b \in \mathbb{Z}$, такива че

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Без ограничение, можем да приемем, че a и b са естествени числа, които нямат общи делители, т.е. не можем да съкратим дробта $\frac{a}{b}$. Получаваме, че

$$2b^2 = a^2.$$

Тогава a^2 е четно число и от Задача 1, a е четно число. Нека $a = 2k$. Получаваме, че

$$2b^2 = 4k^2,$$

от което следва, че

$$b^2 = 2k^2.$$

Това означава, че b също е четно число, $b = 2n$, за някое $n \in \mathbb{Z}$. Следователно, a и b са четни числа и имат общ делител 2, което е противоречие с нашето допускане, че a и b нямат общи делители. Така достигаме до противоречие. Накрая заключаваме, че $\sqrt{2}$ не е рационално число. □

Индукция върху естествените числа

Доказателството с индукция по $\mathbb{N}$ представлява следната схема:

Да напомним, че естествените числа са $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\frac{P(0) \qquad (\forall x \in \mathbb{N})[P(x) \to P(x+1)]}{(\forall x \in \mathbb{N})P(x)}$$

Това означава, че ако искаме да докажем, че свойството $P(x)$ е вярно за всяко естествено число x, то трябва да докажем първо, че е изпълнено $P(0)$ и след това, за произволно естествено число x, ако $P(x)$ вярно, то също така е вярно $P(x+1)$.

Задача 3. Всяко естествено число $n \geq 2$ може да се запише като произведение на прости числа.

Док. Доказателството протича с индукция по $n \geq 2$.

а) За $n = 2$ е ясно.

б) Ако $n + 1$ е просто число, то всичко е ясно. Ако $n + 1$ е съставно, то

$$n + 1 = n_1 \cdot n_2.$$

Тогава $n_1 = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ и $n_2 = q_1^{m_1} \cdots q_r^{m_r}$, където $p_1, \dots, p_k$ и $q_1, \dots, q_r$ са прости числа. Тогава е ясно, че $n+1$ също е произведение на прости числа.

□

Задача 4. Докажете, че за всяко n,

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Док. Доказателството протича с индукция по n.

- За $n = 0$, $\sum_{i=0}^{0} 2^i = 1 = 2^1 - 1$.

- Нека твърдението е вярно за n. Ще докажем, че твърдението е вярно за $n+1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} && \text{(от И.П.)} \\
&= 2.2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1.
\end{aligned}$$

$\square$

1.4 Множества, релации, функции

Основни операции върху множества

Ще разгледаме няколко операции върху произволни множества A и B.

- **Сечение**
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}.$$
- **Обединение**
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}.$$
- **Разлика**
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$
- **Степенно множество**
$$\mathscr{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}.$$

  Примери:

  - $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.
  - $\mathscr{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
  - $\mathscr{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
  - $\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Нека имаме редица от множества $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Тогава имаме следните операции:

- **Обединение на редица от множества**
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \exists i (1 \leq i \leq n \;\&\; x \in A_i)\}.$$
- **Сечение на редица от множества**
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \mid \forall i (1 \leq i \leq n \to x \in A_i)\}.$$

Задача 5. Проверете верни ли са свойствата:

а) $A \subseteq B \;\leftrightarrow\; A \setminus B = \emptyset \;\leftrightarrow\; A \cup B = B \;\leftrightarrow\; A \cap B = A$;

б) $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \setminus B = B \setminus A$.

в) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$;

г) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ и $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

д) $A \backslash B = A \;\leftrightarrow\; A \cap B = \emptyset$;

е) $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$ и $A \backslash B = A \backslash (A \cup B)$;

ж) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

з) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$; Не е вярно!

и) $C \setminus (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$ и $C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$ Закони на Де Морган

к) $C \backslash (\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \bigcap_{i=1}^{n} (C \backslash A_i)$ и $C \backslash (\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = \bigcup_{i=1}^{n} (C \backslash A_i)$;

л) $(A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$ и $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \cup (A \cap C)$;

м) $A \subseteq B \Rightarrow \mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B)$;

н) $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$ и $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$; $X \subseteq A \cup B \overset{?}{\Rightarrow} X \subseteq A \vee X \subseteq B$

За да дадем определение на понятието релация, трябва първо да въведем понятието декартово произведение на множества, което пък от своя страна се основава на понятието наредена двойка.

Наредена двойка

За два елемента a и b въвеждаме опрецията **наредена двойка** $\langle a, b \rangle$. Наредената двойка $\langle a, b \rangle$ има следното характеристичното свойство:

$$a_1 = a_2 \;\wedge\; b_1 = b_2 \quad \leftrightarrow \quad \langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle.$$

Понятието наредена двойка може да се дефинира по много начини, стига да изпълнява харектеристичното свойство. Ето примери как това може да стане:

1) Първото теоретико-множествено определение на понятието наредена двойка е дадено от Норберт Винер: Norbert Wiener (1914)

$$\langle a, b \rangle \overset{\text{деф}}{=} \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}.$$

2) Определението на Куратовски се приема за „стандартно” в наши дни: Kazimierz Kuratowski (1921)

$$\langle a, b \rangle \overset{\text{деф}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Задача 6. Докажете, че горните дефиниции наистина изпълняват характеристичното свойство за наредени двойки.

Определение 1. Сега можем, за всяко естествено число $n \geq 1$, да въведем понятието наредена n-орка $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$:

Пример за индуктивна (рекурсивна) дефиниция

$$\langle a_1 \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} a_1,$$
$$\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \stackrel{\text{деф}}{=} \langle a_1, \langle a_2, \dots, a_n \rangle \rangle$$

Оттук нататък ще считаме, че имаме операцията наредена n-орка, без да се интересуваме от нейната формална дефиниция.

Декартово произведение

На англ. cartesian product

Считаме, че $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$

За две множества A и B, определяме тяхното декартово произведение като
$$A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A \ \& \ b \in B\}.$$
За краен брой множества $A_1, A_2, \dots, A_n$, определяме
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \mid a_1 \in A_1 \ \& \ a_2 \in A_2 \ \& \ \dots \ \& \ a_n \in A_n\}.$$

Задача 7. Проверете, че:

а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

б) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

в) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

г) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

д) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

е) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Основни видове бинарни релации

Подмножествата R от вида $R \subseteq A \times A \times \cdots \times A$ се наричат релации. Релациите от вида $R \subseteq A \times A$ са важен клас, който ще срещаме често. Да разгледаме няколко основни видове релации от този клас:

I) **рефликсивна**, ако
$$(\forall x \in A)[\langle x, x \rangle \in R].$$
Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е рефлексивна, защото
$$(\forall x \in \mathbb{N})[x \leq x].$$

II) **транзитивна**, ако
$$(\forall x, y, z \in A)[\langle x, y \rangle \in R \ \& \ \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R].$$
Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е транзитивна, защото
$$(\forall x, y, z \in A)[x \leq y \ \& \ y \leq z \ \rightarrow \ x \leq z].$$

III) **симетрична**, ако

$$(\forall x, y \in A)[\langle x, y\rangle \in R \to \langle y, x\rangle \in R].$$

Например, релацията $= \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е рефлексивна, защото

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})[x = y \ \to \ y = x].$$

IV) **антисиметрична**, ако

$$(\forall x, y \in A)[\langle x, y\rangle \in R \ \& \ \langle y, x\rangle \in R \to x = y].$$

Например, релацията $\leq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ е антисиметрична, защото

$$(\forall x, y, z \in A)[x \leq y \ \& \ y \leq x \ \to \ x = y].$$

- Една бинарна релация R над множеството A се нарича **релация на еквивалентност**, ако R е рефлексивна, транзитивна и симетрична.
- За всеки елемент $a \in A$, определяме неговия **клас на еквивалентност** относно релацията на еквивалентност R по следния начин:

$$[a]_R \overset{\text{деф}}{=} \{b \in A \mid \langle a, b\rangle \in R\}.$$

Забележка. Лесно се съобразява, че за всеки два елемента $a, b \in A$,

$$\langle a, b\rangle \in R \ \leftrightarrow \ [a]_R = [b]_R.$$

Пример 1. За всяко естествено число $n \geq 2$, дефинираме релацията R_n като

$$\langle x, y\rangle \in R_n \ \leftrightarrow \ x \equiv y \pmod{n}.$$

Ясно е, че R_n са релации на еквивалентност.

Операции върху бинарни релации

I) **Композиция** на две релации $R \subseteq B \times C$ и $P \subseteq A \times B$ е релацията $R \circ P \subseteq A \times C$, определена като:

$$R \circ P \overset{\text{деф}}{=} \{\langle a, c\rangle \in A \times C \mid (\exists b \in B)[\langle a, b\rangle \in P \ \& \ \langle b, c\rangle \in R]\}.$$

II) **Обръщане** на релацията $R \subseteq A \times B$ е релацията $R^{-1} \subseteq B \times A$, определена като:

$$R^{-1} \overset{\text{деф}}{=} \{\langle x, y\rangle \in B \times A \mid \langle y, x\rangle \in R\}.$$

III) **Рефлексивно затваряне** на релацията $R \subseteq A \times A$ е релацията

$$P \overset{\text{деф}}{=} R \cup (A \times A).$$

Очевидно е, че P е рефлексивна релация, дори ако R не е.

IV) **Итерация** на релацията $R \subseteq A \times A$ дефинираме като за всяко естествено число n, дефинираме релацията R^n по следния начин:

Лесно се вижда, че $R^1 = R$

$$R^0 \overset{\text{деф}}{=} A \times A$$

$$R^{n+1} \overset{\text{деф}}{=} R^n \circ R.$$

V) **Транзитивно затваряне** на $R \subseteq A \times A$ е релацията

✍ Проверете, че R^+ е транзитивна релация!

$$R^+ \stackrel{\text{деф}}{=} \bigcup_{n \geq 1} R^n.$$

За дадена релация R, с $R^\star$ ще означаваме нейното рефлексивно и транзитивно затваряне. От дефинициите е ясно, че

$$R^\star = \bigcup_{n \geq 0} R^n.$$

Видове функции

Функцията $f : A \to B$ е:

- **инекция**, ако

  (или f е **обратима**)

  $$(\forall a_1, a_2 \in A)[a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)],$$

  или еквивалентно,

  $$(\forall a_1, a_2 \in A)[f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2].$$

- **сюрекция**, ако

  (или f е **върху** B)

  $$(\forall b \in B)(\exists a \in A)[f(a) = b].$$

- **биекция**, ако е инекция и сюрекция.

Задача 8. Докажете, че $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ е биекция, където

Канторово кодиране. Да се нарисува картинка

$$f(x, y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x.$$

1.5 Азбуки, думи, езици

Основни понятия

- **Азбука** ще наричаме всяко крайно множество, като обикновено ще я означаваме със Σ. Елементите на азбуката Σ ще наричаме **букви** или символи.

  Често ще използваме буквите a, b, c за да означаваме букви.

- **Дума** над азбуката Σ е произволна крайна редица от елементи на Σ. Например, за $\Sigma = \{a, b\}$, $aababba$ е дума над Σ с дължина 7. С $|\alpha|$ ще означаваме дължината на думата α.

  Обикновено ще означаваме думите с α, β, γ, ω.

- Обърнете внимание, че имаме единствена дума с дължина 0. Тази дума ще означаваме с ε и ще я наричаме **празната дума**, т.е. $|\varepsilon| = 0$.

- С a^n ще означаваме думата съставена от n a-та. Формалната индуктивна дефиниция е следната:

  $$a^0 \stackrel{\text{деф}}{=} \varepsilon,$$
  $$a^{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} a^n a.$$

- Множеството от всички думи над азбуката Σ ще означаваме със $\Sigma^\star$. Например, за $\Sigma = \{a, b\}$,

$$\Sigma^\star = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, \dots\}.$$

Обърнете внимание, че $\emptyset^\star = \{\varepsilon\}$.

- **Лексикографска наредба**

Операции върху думи

- Операцията **конкатенация** взима две думи α и β и образува новата дума $\alpha \cdot \beta$ като слепва двете думи. Например $aba \cdot bb = ababb$. Обърнете внимание, че в общия случай $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$. Можем да дадем формална индуктивна дефиниция на операцията конкатенация по дължината на думата β.

Често ще пишем $\alpha\beta$ вместо $\alpha \cdot \beta$

  - Ако $|\beta| = 0$, то $\beta = \varepsilon$. Тогава $\alpha \cdot \varepsilon \stackrel{\text{деф}}{=} \alpha$.
  - Ако $|\beta| = n + 1$, то $\beta = \gamma b$, $|\gamma| = n$. Тогава $\alpha \cdot \beta \stackrel{\text{деф}}{=} (\alpha \cdot \gamma)b$.

- Друга често срещана операция върху думи е **обръщането** на дума. Дефинираме думата α^R като обръщането на α по следния начин.

  - Ако $|\alpha| = 0$, то $\alpha = \varepsilon$ и $\alpha^R \stackrel{\text{деф}}{=} \varepsilon$.
  - Ако $|\alpha| = n + 1$, то $\alpha = a\beta$, където $|\beta| = n$. Тогава $\alpha^R \stackrel{\text{деф}}{=} (\beta^R)a$.

  Например, $reverse^R = esrever$.

- Казваме, че думата α е **префикс** на думата β, ако съществува дума γ, такава че $\beta = \alpha \cdot \gamma$. α е **суфикс** на β, ако $\beta = \gamma \cdot \alpha$, за някоя дума γ.

- Нека A и B са множества от думи. Дефинираме конкатенацията на A и B като

$$A \cdot B \stackrel{\text{деф}}{=} \{\alpha \cdot \beta \mid \alpha \in A \ \&\ \beta \in B\}.$$

Обърнете внимание, че $\emptyset \cdot A = A \cdot \emptyset = \emptyset$

Също така, $\{\varepsilon\} \cdot A = A \cdot \{\varepsilon\} = A$

- Сега за едно множество от думи A, дефинираме A^n индуктивно:

$$A^0 \stackrel{\text{деф}}{=} \{\varepsilon\},$$
$$A^{n+1} \stackrel{\text{деф}}{=} A^n \cdot A.$$

Ако $A = \{ab, ba\}$, то $A^0 = \{\varepsilon\}$, $A^1 = A$, $A^2 = \{abab, abba, baba, baab\}$. Ако $A = \{a, b\}$, то $A^n = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid |\alpha| = n\}$.

- За едно множеството от думи A, дефинираме:

Операцията $\star$ е известна като звезда на Клини

$$A^\star \stackrel{\text{деф}}{=} \bigcup_{n \geq 0} A^n$$
$$= A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \dots$$
$$A^+ \stackrel{\text{деф}}{=} A \cdot A^\star.$$

Задача 9. Докажете, че:

а) операцията конкатенация е *асоциативна*, т.е. за всеки три думи α, β, γ,

$$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma);$$

б) за множествата от думи A, B и C,

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

в) $\{\varepsilon\}^\star = \varepsilon$;

г) за произволно множество от думи A, $A^\star = A^\star \cdot A^\star$ и $(A^\star)^\star = A^\star$;

д) за произволни букви a и b, $\{a, b\}^\star = \{a\}^\star \cdot (\{b\} \cdot \{a\}^\star)$.

Задача 10. Докажете, че за всеки две думи α и β е изпълнено:

а) $(\alpha \cdot \beta)^R = \beta^R \cdot \alpha^R$;

б) α е префикс на β точно тогава, когато α^R е суфикс на β^R;

в) $(\alpha^R)^R = \alpha$;

г) $(\alpha^n)^R = (\alpha^R)^n$, за всяко $n \geq 0$.

Библиография

Повечето книги започват с уводна глава за множества, релации и езици.

- Глава 1 от [Ros12].
- Глава 1 от [PL98].
- На практика следваме Глава 2 от [Koz97] в описанието на думи и азбуки.

Глава 2

Езици и автомати

2.1 Автоматни езици

Определение 2. Краен автомат е петорка $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$, където

1) Q е крайно множество от състояния;

2) Σ е азбука;

3) $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ е (частична) функция на преходите;

(Sipser разглежда тотални δ функции)

4) $s \in Q$ е начално състояние;

5) $F \subseteq Q$ е множеството от финални състояния, $F \neq \emptyset$.

Ако функцията на преходите δ е тотална функция, то казваме, че автоматът $\mathcal{A}$ е **тотален**. Това означава, че за всяка двойка $(a, q) \in \Sigma \times Q$, същесествува $q' \in Q$, за което $\delta(a, q) = q'$.

Нека имаме една дума $\alpha \in \Sigma^\star$, $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$. Казваме, че α се **разпознава** от автомата $\mathcal{A}$, ако съществува редица от състояния $q_0, q_1, q_2, \ldots, q_n$, такива че:

- $q_0 = s$, началното състояние на автомата;
- $\delta(q_i, a_{i+1}) = q_{i+1}$, за всяко $i = 0, \ldots, n-1$;
- $q_n \in F$.

Казваме, че $\mathcal{A}$ **разпознава** езика L, ако $\mathcal{A}$ разпознава точно думите от L, т.е. $L = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \mathcal{A} \text{ разпознава } \alpha\}$. Обикновено означаваме езика, който се разпознава от даден автомат $\mathcal{A}$ с $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. В такъв случай ще казваме, че езикът L е **автоматен**.

При дадена (частична) функция на преходите δ, често е удобно да разглеждаме (частичната) функция $\delta^\star : Q \times \Sigma^\star \to Q$, която е дефинирана по следния начин:

Това е пример за индуктивна (рекурсивна) дефиниция по дължината на думата α

- $\delta^\star(q, \varepsilon) = q$, за всяко $q \in Q$;
- $\delta^\star(q, a\beta) = \delta^\star(\delta(q, a), \beta)$, за всяко $q \in Q$, всяко $a \in \Sigma$ и $\beta \in \Sigma^\star$.

Тогава една дума α се *разпознава* от автомата $\mathcal{A}$ точно тогава, когато $\delta^\star(s, \alpha) \in F$. Оттук следва, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(s, \alpha) \in F\}.$$

Твърдение 1. $(\forall q \in Q)(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^\star)[\delta^\star(q, \alpha\beta) = \delta^\star(\delta^\star(q, \alpha), \beta)]$.

Док. Индукция по дължината на α. □

✍ Напише доказателството!

Моментното описание на изчисление с краен автомат представлява двойка от вида $(q, \alpha) \in Q \times \Sigma^\star$, т.е. автоматът се намира в състояние q, а думата, която остава да се прочете е α. Удобно е да въведем бинарната релация $\vdash_{\mathcal{A}}$ над $Q \times \Sigma^\star$, която ще ни казва как моментното описание на автомата $\mathcal{A}$ се променя след изпълнение на една стъпка:

$$(q, x\alpha) \vdash_{\mathcal{A}} (p, \alpha), \text{ ако } \delta(q, x) = p.$$

Рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_{\mathcal{A}}$ ще означаваме с $\vdash^\star_{\mathcal{A}}$. Получаваме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (s, \alpha) \vdash^\star_{\mathcal{A}} (p, \varepsilon) \ \&\ p \in F\}.$$

Нашата дефиниция на автомат позволява δ да бъде частична функция, т.е. може да има $q \in Q$ и $a \in \Sigma$, за които $\delta(q, a)$ не е дефинирана. Следващото твърдение ни казва, че ние съвсем спокойно можем да разглеждаме автомати само с тотални функции на преходите δ.

Твърдение 2. За всеки краен автомат $\mathcal{A}$, съществува *тотален* краен автомат $\mathcal{A}'$, за който $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$.

Док. Нека $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$. Дефинираме тоталния автомат

$$\mathcal{A}' = \langle Q \cup \{q_e\}, \Sigma, \delta', s, F\rangle,$$

като за всеки преход (q, a), за който δ не е дефинирана, дефинираме δ' да отива в новото състояние q_e. Ето и цялата дефиниция на новата функция на преходите δ':

- $\delta'(q_e, a) = q_e$, за всяко $a \in \Sigma$;

  q_e - error състояние

- За всяко $q \in Q$, $a \in \Sigma$, ако $\delta(q, a) = p$, то $\delta'(q, a) = p$;

  $\mathcal{A}'$ симулира $\mathcal{A}$

- За всяко $q \in Q$, $a \in \Sigma$, ако $\delta(q, a)$ не е дефинирано, то $\delta'(q, a) = q_e$.

Сега лесно може да се докаже, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$. □

✍ Довършете доказателството!

Твърдение 3. Класът на автоматните езици е затворен относно операцията **обединение**. Това означава, че ако L_1 и L_2 са два произволни автоматни езика над азбуката Σ, то $L_1 \cup L_2$ също е автоматен език.

Док. Нека $L_1 = L(\mathcal{A}_1)$ и $L_2 = L(\mathcal{A}_2)$, където $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, \delta_1, F_1\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, \delta_2, F_2\rangle$ са **тотални**. Определяме автомата $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$, който разпознава $L_1 \cup L_2$ по следния начин:

Защо изискваме $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ да са тотални?

- $Q = Q_1 \times Q_2$;
- Определяме за всяко $\langle r_1, r_2\rangle \in Q$ и всяко $a \in \Sigma$,

  $$\delta(\langle r_1, r_2\rangle, a) = \langle \delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a)\rangle;$$

  Едновременно симулираме изчисление и по двата автомата

- $s = \langle s_1, s_2 \rangle$;
- $F = \{\langle r_1, r_2 \rangle \mid r_1 \in F_1 \vee r_2 \in F_2\} = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$.

$\square$

По-нататък ще дадем друга конструкция за обединение, която ще бъде по-ефективна.

✍ Проверете, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$

Следствие 1. Класът на автоматните езици е затворен относно операцията **сечение**. Това означава, че ако L_1 и L_2 са два произволни автоматни езика над азбуката Σ, то $L_1 \cap L_2$ също е автоматен език.

Док. Използвайте конструкцията на автомата $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F \rangle$ от *Твърдение 3*, с единствената разлика, че тук избираме финалните състояния да бъдат елементите на множеството

✍ Докажете, че така построения автомат $\mathcal{A}$ разпознава $L_1 \cap L_2$!

$$F = \{\langle q_1, q_2 \rangle \mid q_1 \in F_1 \ \& \ q_2 \in F_2\} = F_1 \times F_2.$$

$\square$

Твърдение 4. Нека L е автоматен език. Тогава $\Sigma^\star \setminus L$ също е автоматен език.

Док. Нека $L = L(\mathcal{A})$, където $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F \rangle$ е **тотален**. Да вземем автомата $\mathcal{A}' = \langle Q, \Sigma, s, \delta, Q \setminus F \rangle$, т.е. $\mathcal{A}'$ е същия като $\mathcal{A}$, с единствената разлика, че финалните състояния на $\mathcal{A}'$ са тези състояния, които **не** са финални в $\mathcal{A}$. $\square$

Защо искаме $\mathcal{A}$ да бъде тотален ?

✍ Проверете, че $\Sigma^\star \setminus L = \mathcal{L}(\mathcal{A}')$

Задача 11. За всеки от следните езици L, постройте автомат $\mathcal{A}$, който разпознава езика L.

а) $L = \{a^n b \mid n \geq 0\}$;

б) $L = \{\varepsilon, a, b\}$;

в) $L = \emptyset$;

г) $L = \{a, b\}^\star \setminus \{\varepsilon\}$;

д) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$;

е) $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$;

ж) $L = \{a, b\}^\star \setminus \{a\}$;

з) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid$ съдържа поне две $a\}$;

и) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid$ съдържа поне две a и поне едно $b\}$;

к) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid$ на всяка нечетна позиция на w е буквата $a\}$;

л) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid w$ съдържа четен брой a и най-много едно $b\}$;

м) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid |w| \leq 3\}$;

н) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid w$ не започва с $ab\}$;

о) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid w$ завършва с $ab\}$;

п) $L = \{w \in \{a, b\}^\star \mid w$ съдържа $bab\}$;

р) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid w$ не съдържа $bab\}$;

с) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid w$ няма две последователни $a\}$; (решена е по-долу)

т) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid w$ започва и завършва с буквата $a\}$;

у) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid w$ започва и завършва с една и съща буква$\}$;

ф) $L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid |\omega| \equiv 0 \pmod 2$ & ω съдържа точно едно $a\}$;

х) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid$ всяко a в w се следва от поне едно $b\}$;

ц) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid |w| \equiv 0 \bmod 3\}$;

ч) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid N_a(w) \equiv 0 \bmod 3\}$; $N_a(w)$ - броят на срещанията на буквата a в думата w

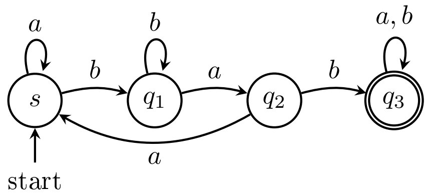
ш) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid N_b(w) \equiv 1 \bmod 2\}$;

щ) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid N_a(w) \equiv 0 \bmod 3$ & $N_b(w) \equiv 1 \bmod 2\}$;

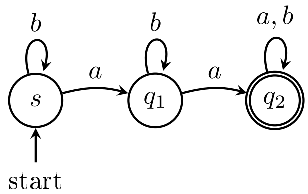
ю) $L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv 0 \bmod 2 \;\vee\; \omega$ съдържа точно две $b\}$;

я) $L = \{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \omega$ съдържа равен брой срещания на ab и на $ba\}$.

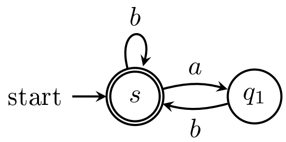
✍ За всички тези автомати, дефинирайте функцията на преходите им!



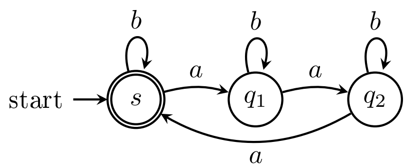
(а) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid \omega$ съдържа $bab\}$



(б) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid N_a(\omega) \geq 2\}$



(в) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid$ всяко a в ω се следва от поне едно $b\}$



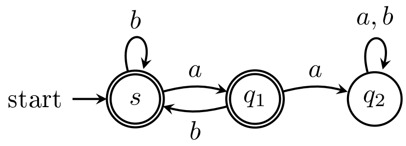
(г) $\{\omega \in \{a,b\}^\star \mid N_a(\omega) \equiv 0 \pmod 3\}$

В повечето от горните задачи е лесно да се съобрази, че построения автомат разпознава желания език. При по-сложни задачи обаче, ще се наложи да дадем доказателство, като обикновено се прилага *метода на математическата индукция* върху дължината на думите. Ще разгледаме няколко такива примера.

Задача 12. Докажете, че езикът L е автоматен, където

$$L = \{\alpha \in \{a,b\}^\star \;\mid\; \alpha \text{ не съдържа две поредни срещания на } a\}.$$

Док. Да разгледаме $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F \rangle$ с функция на преходите



Ще докажем, че $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Първо ще се концентрираме върху доказателството на $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$. Ще докажем с индукция по дължината на думата α, че:

Озн. $|\alpha|$ - дължината на думата α

(1) ако $\delta^\star(s, \alpha) = s$, то α не съдържа две поредни срещания на a и ако $|\alpha| > 0$, то α завършва на b;

(2) ако $\delta^\star(s, \alpha) = q_1$, то α не съдържа две поредни срещания на a и завършва на a.

За $|\alpha| = 0$, то твърденията (1) и (2) са ясни (Защо?). Да приемем, че твърденията (1) и (2) са верни за произволни думи α с дължина n. Нека $|\alpha| = n + 1$, т.е. $\alpha = \beta x$, където $|\beta| = n$ и $x \in \Sigma$. Ще докажем (1) и (2) за α.

- Нека $\delta^\star(s, \beta x) = s = \delta(\delta^\star(s, \beta), x)$. Според дефиницията на функцията δ, $x = b$ и $\delta^\star(s, \beta) \in \{s, q_1\}$. Тогава по **И.П.** за (1) и (2), β не съдържа две поредни срещания на a. Тогава е очевидно, че βx също не съдържа две поредни срещания на a.

- Нека $\delta^\star(s, \beta x) = q_1 = \delta(\delta^\star(s, \beta), x)$. Според дефиницията на δ, $x = a$ и $\delta^\star(s, \beta) = s$. Тогава по **И.П.** за (2), β не съдържа две поредни срещания на a и завършва на b. Тогава е очевидно, че βx също не съдържа две поредни срещания на a.

Така доказахме с индукция по дължината на думата, че за всяка дума α са изпълнени твърденията (1) и (2). По дефиниция, ако $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, то $\delta^\star(s, \alpha) \in \{s, q_1\}$ и от (1) и (2) следва, че и в двата случа α не съдържа две поредни срещания на буквата a, т.е. $\alpha \in L$. С други думи, доказахме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L.$$

Сега ще докажем другата посока, т.е. $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Това означава да докажем, че

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\star)[\alpha \in L \;\Rightarrow\; \delta^\star(s, \alpha) \in F],$$

което е еквивалентно на

Да напомним, че $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\star)[\delta^\star(s, \alpha) \notin F \;\Rightarrow\; \alpha \notin L]. \tag{2.1}$$

Това е лесно да се съобрази. Щом $\delta^\star(s, \alpha) \notin F$, то $\delta^\star(s, \alpha) = q_2$ и думата α може да се представи по следния начин:

$$\alpha = \beta a \gamma \;\&\; \delta^\star(s, \beta) = q_1.$$

Използвайки свойство (2) от по-горе, понеже $\delta^\star(s, \beta) = q_1$, то β не съдържа две поредни срещания на a, но завършва на a. Сега е очевидно, че βa съдържа две поредни срещания на a и щом βa е префикс на α, то думата $\alpha \notin L$. С това доказахме Свойство 2.1, а следователно и посоката $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$. $\square$

За една дума $\alpha \in \{0,1\}^\star$, нека с $\alpha_{(2)}$ да означим числото в десетична бройна система, което се представя в двоична бройна система като α. Например, $1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13$. Тогава имаме следните свойства:

- $\varepsilon_{(2)} = 0$,
- $(\alpha 0)_{(2)} = 2 \cdot (\alpha)_{(2)}$,
- $(\alpha 1)_{(2)} = 2 \cdot (\alpha)_{(2)} + 1$.

Да отбележим, че за всяко число n има безкрайно много думи α, за които $\alpha_{(2)} = n$. Например, $10_{(2)} = 010_{(2)} = 0010_{(2)} = \cdots$

Задача 13. Докажете, че $L = \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega_{(2)} \equiv 2 \pmod 3\}$ е автоматен.

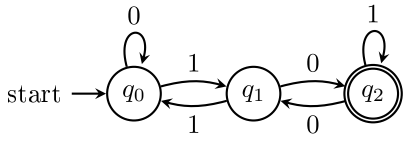
Док. Нашият автомат ще има три състояния $\{q_0, q_1, q_2\}$, като началното състояние ще бъде q_0. Целта ни е да дефинираме така автомата, че да имаме следното свойство:

$$(\forall \alpha \in \Sigma^\star)(\forall i < 3)[\alpha_{(2)} \equiv i \pmod 3 \ \Leftrightarrow\ \delta^\star(q_0, \alpha) = q_i], \tag{2.2}$$

т.е. всяко състояние отговаря на определен остатък при деление на три. Понеже искаме нашия автомат да разпознава тези думи α, за които $\alpha_{(2)} \equiv 2$ mod 3, финалното състояние ще бъде q_2. Дефинираме функцията δ следвайки следните свойства:

- $\alpha_{(2)} \equiv 0 \bmod 3 \ \Rightarrow\ (\alpha 0)_{(2)} \equiv 0 \bmod 3$; $\delta(q_0, 0) = q_0$
- $\alpha_{(2)} \equiv 0 \bmod 3 \ \Rightarrow\ (\alpha 1)_{(2)} \equiv 1 \bmod 3$; $\delta(q_0, 1) = q_1$
- $\alpha_{(2)} \equiv 1 \bmod 3 \ \Rightarrow\ (\alpha 0)_{(2)} \equiv 2 \bmod 3$; $\delta(q_1, 0) = q_2$
- $\alpha_{(2)} \equiv 1 \bmod 3 \ \Rightarrow\ (\alpha 1)_{(2)} \equiv 0 \bmod 3$; $\delta(q_1, 1) = q_0$
- $\alpha_{(2)} \equiv 2 \bmod 3 \ \Rightarrow\ (\alpha 0)_{(2)} \equiv 1 \bmod 3$; $\delta(q_2, 0) = q_1$
- $\alpha_{(2)} \equiv 2 \bmod 3 \ \Rightarrow\ (\alpha 1)_{(2)} \equiv 2 \bmod 3$. $\delta(q_2, 1) = q_2$

Ето и картинка на автомата $\mathcal{A}$:



Фигура 2.2: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \stackrel{?}{=} \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \alpha_{(2)} \equiv 2 \pmod 3\}$

Да разгледаме твърденията:

(1) $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_0 \;\Rightarrow\; \alpha_{(2)} \equiv 0 \mod 3$;

(2) $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_1 \;\Rightarrow\; \alpha_{(2)} \equiv 1 \mod 3$;

(3) $\delta^\star(q_0, \alpha) = q_2 \;\Rightarrow\; \alpha_{(2)} \equiv 2 \mod 3$.

Ще докажем (1), (2) и (3) *едновременно* с индукция по дължината на думата α. За $|\alpha| = 0$, всички условия са изпълнени. (Защо?) Да приемем, че (1), (2) и (3) са изпълнени за думи с дължина n. Нека $|\alpha| = n + 1$, т.е. $\alpha = \beta x$, $|\beta| = n$. За да приложим индукционното предположение, ще използваме следното свойство:

$$\delta^\star(q_0, \beta x) = \delta(\delta^\star(q_0, \beta), x).$$

Ще докажем подробно само (3) понеже другите твърдения се доказват по сходен начин. Нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_2$. Имаме два случая:

Обърнете внимание, че в доказателството на (3) използваме И.П. не само за (3), но и за (2)

- $x = 0$. Тогава, по дефиницията на δ, $\delta(q_1, 0) = q_2$ и следователно, $\delta^\star(q_0, \beta) = q_1$. По **И.П.** за (2) с β,

$$\delta^\star(q_0, \beta) = q_1 \;\Rightarrow\; \beta_{(2)} \equiv 1 \bmod 3$$

  Тогава, $(\beta 0)_{(2)} \equiv 2 \mod 3$. Така доказахме, че

$$\delta^\star(q_0, \beta 0) = q_2 \;\Rightarrow\; (\beta 0)_{(2)} \equiv 2 \bmod 3.$$

- $x = 1$. Тогава, по дефиницията на δ, $\delta(q_2, 1) = q_2$ и следователно, $\delta^\star(q_0, \beta) = q_2$. По **И.П.** за (3) с β,

$$\delta^\star(q_0, \beta) = q_2 \;\Rightarrow\; \beta_{(2)} \equiv 2 \mod 3.$$

  Тогава, $(\beta 1)_{(2)} \equiv 2 \mod 3$. Така доказахме, че

$$\delta^\star(q_0, \beta 1) = q_2 \;\Rightarrow\; (\beta 1)_{(2)} \equiv 2 \mod 3.$$

За да докажем (1), нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_0$.

- $x = 0$. Разсъжденията са аналогични, като използваме **И.П.** за (1).
- $x = 1$. Разсъжденията са аналогични, като използваме **И.П.** за (2).

По същия начин доказваме и (2). Нека $\delta^\star(q_0, \beta x) = q_1$.

- При $x = 0$, използваме **И.П.** за (3).
- При $x = 1$, използваме **И.П.** за (1).

От (1), (2) и (3) следва директно, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subseteq L$.

За другата посока, нека $\alpha \in L$, т.е. $(\alpha)_{(2)} \equiv 2 \bmod 3$. Ако допуснем, че $\alpha \notin \mathcal{L}(\mathcal{A})$, то това означава, че $\delta^\star(q_0, \alpha) \in \{q_0, q_1\}$. Но в тези случаи получаваме от твърдения (1) и (2), че $(\alpha)_{(2)} \equiv 0 \bmod 3$ или $(\alpha)_{(2)} \equiv 1 \bmod 3$. Това е противоречие с избора на $\alpha \in L$. Следователно, ако $\alpha \in L$, то $\delta(q_0, \alpha) = q_2$. Така доказахме и посоката $L \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A})$. $\square$

2.2 Регулярни езици

Определение 3. Нека е дадена азбука Σ. Дефинираме множеството от *регулярни езици* над азбуката Σ и едновременно с това множеството от *регулярни изрази*, които разпознават тези езици.

Това е друг пример за индуктивна (рекурсивна) дефиниция.

1) за всеки символ $a \in \Sigma$, $\{a\}$ е регулярен език, който се разпознава от регулярния израз a;

2) $\{\varepsilon\}$ е регулярен език, който се разпознава от регулярния израз ε;

3) $\emptyset$ е регулярен език, който се разпознава от регулярния израз $\emptyset$;

4) $L_1 \cup L_2$, където L_1 и L_2 са регулярни езици, който се разпознава от регулярния израз $(r_1 + r_2)$, където r_1 и r_2 са регулярните изрази за L_1 и L_2. Записваме, че $\mathcal{L}(r_1) \cup \mathcal{L}(r_2) = \mathcal{L}(r_1 + r_2)$.

5) $L_1 \cdot L_2 = \{uw \mid u \in L_1 \;\&\; w \in L_2\}$, където L_1 и L_2 са регулярни езици, който се разпознава от регулярния израз $(r_1 \cdot r_2)$, където r_1 и r_2 са регулярните изрази за L_1 и L_2. Записваме, че $\mathcal{L}(r_1) \cdot \mathcal{L}(r_2) = \mathcal{L}(r_1 \cdot r_2)$.

Тази операция се наричка конкатенация. Обикновено изпускаме знака $\cdot$

6) $L^\star = \{w_1 w_2 \cdots w_n \mid n \in \mathbb{N} \;\&\; w_i \in L \text{ за всяко } i \leq n\}$, където L е регулярен език, който се разпознава от регулярния израз $(r^\star)$, където r е регулярния израз за L. Записваме, че $\mathcal{L}(r)^\star = \mathcal{L}(r^\star)$. Можем да запишем, че $L^\star = \bigcup_n L^n$, където $L^0 = \{\varepsilon\}$ и $L^{n+1} = L^n \cdot L$.

Звезда на Клини

Пример 2. Нека да разгледаме няколко примера какво точно представлява прилагането на операцията звезда на Клини върху един език.

- Нека $L = \{0, 11\}$. Тогава:
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$, $L^1 = L$,
  - $L^2 = L^1 \cdot L^1 = \{00, 011, 110, 1111\}$,
  - $L^3 = L^1 \cdot L^2 = \{000, 0011, 0110, 01111, 1100, 11011, 11110, 111111\}$.
- Нека $L = \emptyset$. Тогава:
  - $L^0 = \{\varepsilon\}$,
  - $L^1 = \emptyset$,
  - $L^2 = L^1 \cdot L^1 = \emptyset$.

  Получаваме, че $L^\star = \{\varepsilon\}$, т.е. *краен* език
- Нека $L = \{0^i \mid i \in \mathbb{N}\} = \{\varepsilon, 0, 00, 000, \dots\}$. Тогава лесно може да се види, че $L = L^\star$.

Задача 14. За произволни регулярни изрази r и s, проверете:

а) $r + s = s + r$;

б) $(\varepsilon + r)^\star = r^\star$;

в) $\emptyset^\star = \varepsilon$;

г) $(r^\star s^\star) = (r + s)^\star$;

д) $(r^\star)^\star = r^\star$;

е) $(rs + r)^\star r = r(sr + r)^\star$;

ж) $s(rs + s)^\star r = rr^\star s(rr^\star s)^\star$;

з) $(r + s)^\star = r^\star + s^\star$;

и) $\emptyset^\star = \varepsilon^\star$;

Теорема 1 (Клини)**.** Всеки автоматен език се описва с регулярен израз.

Док. Нека $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, за някой краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$. Да фиксираме едно изброяване на състоянията $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$, като началното състояние е q_1. Ще означаваме с $L(i, j, k)$ множеството от тези думи, които могат да се разпознаят от автомата по път, който започва от q_i, завършва в q_j, и междинните състояния имат индекси $\leq k$. Например, за думата $\alpha = a_1 a_2 \cdots a_n$ имаме, че $\alpha \in L(i, j, k)$ точно тогава, когато съществуват състояния $q_{l_1}, \ldots, q_{l_{n-1}}$, като $l_1, \ldots, l_{n-1} \leq k$ и

стр. 79 от [PL98], стр. 33 от [HU79]

$$q_i \xrightarrow{a_1} q_{l_1} \xrightarrow{a_2} q_{l_2} \xrightarrow{a_3} \cdots \xrightarrow{a_{n-1}} q_{l_{n-1}} \xrightarrow{a_n} q_j.$$

Тогава за $n = |Q|$,

$$L(i, j, n) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid \delta^\star(q_i, \alpha) = q_j\}.$$

Така получаваме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \bigcup \{L(1, j, n) \mid q_j \in F\} = \bigcup_{q_j \in F} L(1, j, n).$$

Ще докажем с **индукция по** k, че за всяко i, j, k, множествата от думи $L(i, j, k)$ се описват с регулярен израз $r^k_{i,j}$

а) Нека $k = 0$. Ще докажем, че за всяко i, j, $L(i, j, 0)$ се описва с регулярен израз. Имаме да разгледаме два случая.

   Ако $i = j$, то

$$L(i, j, 0) = \{\varepsilon\} \cup \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}.$$

   Ако $i \neq j$, то

$$L(i, j, 0) = \{a \in \Sigma \mid \delta(q_i, a) = q_j\}.$$

б) Да предположим, че $k > 0$ и за всяко i, j, можем да намерим регулярните изрази съответстващи на $L(i, j, k - 1)$. Тогава

$$L(i, j, k) = L(i, j, k - 1) \ \cup \ L(i, k, k - 1) \cdot (L(k, k, k - 1)^\star) \cdot L(k, j, k - 1).$$

   Тогава по **И.П.** следва, че $L(i, j, k)$ може да се опише с регулярен израз, който е

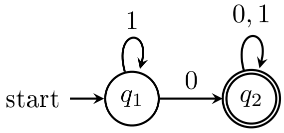
$$r^{k-1}_{i,j} + r^{k-1}_{i,k} \cdot (r^{k-1}_{k,k})^\star \cdot r^{k-1}_{k,j}.$$

Заключаваме, че за всяко i, j, k, $L(i, j, k)$ може да се опише с регулярен израз $r^k_{i,j}$. Тогава ако $F = \{q_{i_1}, \dots, q_{i_k}\}$, то $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ се описва с регулярния израз

$$r^n_{1,i_1} + r^n_{1,i_2} + \cdots + r^n_{1,i_k}.$$

$\square$

Пример 3. Да разгледаме следния автомат:



За да намерим регулярния език за автомата от Пример 3, трябва да намерим $r^2_{1,2}$, защото началното състояние е q_1, финалното е q_2 и броят на състоянията в автомата е 2.

$$\begin{aligned}
r^0_{1,1} &= \varepsilon + 1,\\
r^0_{1,2} &= 0,\\
r^0_{2,1} &= \emptyset,\\
r^0_{2,2} &= \varepsilon + 0 + 1,\\
r^1_{1,2} &= r^0_{1,2} + r^0_{1,1} \cdot (r^0_{1,1})^\star \cdot r^0_{1,2} = 0 + (\varepsilon + 1)(\varepsilon + 1)^\star 0 = 1^\star 0,\\
r^1_{2,2} &= r^0_{2,2} + r^0_{2,1} \cdot (r^0_{1,1})^\star \cdot r^0_{1,2} = \varepsilon + 0 + 1 + \emptyset(\varepsilon + 1)^\star 0 = \varepsilon + 0 + 1\\
r^2_{1,2} &= r^1_{1,2} + r^1_{1,2}(r^1_{2,2})^\star r^1_{2,2}\\
&= 1^\star 0 + 1^\star 0(\varepsilon + 0 + 1)^\star(\varepsilon + 0 + 1) = 1^\star 0(0 + 1)^\star.
\end{aligned}$$

Ясно е, че L_1 се описва с регулярния израз $r^2_{1,2} = 1^\star 0(0 + 1)^\star$.

Следващата ни цел е да видим, че имаме и обратната посока на горната лема. Ще докажем, че всеки регулярен език е автоматен. За тази цел първо ще въведем едно обобщение на понятието краен детерминиран автомат.

2.3 Недетерминирани крайни автомати

Определение 4. Недетерминиран краен автомат представлява

Въведени от Рабин и Скот [RS59]

$$\mathcal{N} = \langle Q, \Sigma, s, \Delta, F \rangle,$$

- Q е крайно множество от състояния;
- Σ е крайна азбука;
- $\Delta : Q \times \Sigma \to \mathscr{P}(Q)$ е функцията на преходите. Обърнете внимание, че тя е тотална.

Да напомним, че $\mathscr{P}(Q) = \{R \mid R \subseteq Q\}$, $|\mathscr{P}(Q)| = 2^{|Q|}$

Sipser позволява ϵ-преходи

- $s \in Q$ е началното състояние;
- $F \subseteq Q$ е множеството от финални състояния.

Теорема 2. За всеки НКА $\mathcal{N}$ съществува еквивалентен на него ДКА $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{D})$.

Док. Нека $\mathcal{N} = \langle Q, \Sigma, s, \Delta, F\rangle$. Ще построим ДКА $\mathcal{D} = (Q', \Sigma, \delta, s', F')$. Конструкцията е следната:

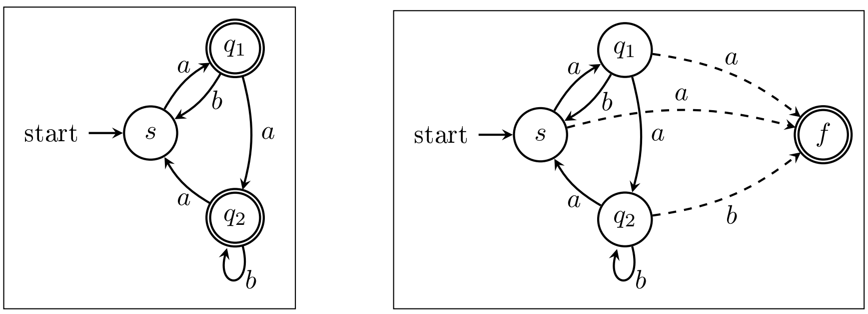
Да отбележим, че детерминираният автомат $\mathcal{D}$ има не повече от $2^{|Q|}$ на брой състояния

- $Q' = \mathscr{P}(Q)$;
- $\delta(R, a) = \{q \in Q \mid (\exists r \in R)[q \in \Delta(r, a)]\} = \bigcup_{r \in R} \Delta(r, a)$;
- $s' = \{s\}$;
- $F' = \{R \subseteq Q \mid R \cap F \neq \emptyset\}$.

$\square$

Задача 15. За всеки НКА $\mathcal{N}$ съществува НКА $\mathcal{N}'$ с едно финално състояние, за който $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{N}')$.

Упътване. Вместо формална конструкция, да разгледаме един пример, който илюстрира идеята.



(а) автомат $\mathcal{N}$ (б) автомат $\mathcal{N}'$, $\mathcal{L}(\mathcal{N}') = \mathcal{L}(\mathcal{N})$

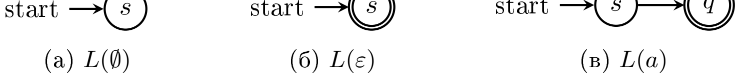
За произволен автомат $\mathcal{N}$, формулирайте точно конструкцията на $\mathcal{N}'$ с едно финално състояние и докажете, че наистина $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{N}')$. Обърнете внимание, че примера показва, че е възможно $\mathcal{N}$ да е детерминиран автомат, но полученият $\mathcal{N}'$ да бъде недетерминиран. $\square$

Задача 16. Докажете, че ако L е автоматен език, то $L^R = \{\omega^R \mid \omega \in L\}$ също е автоматен.

Нека $\mathcal{A}$, $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$, е само с едно финално състояние.

Лема 1. Съществува НКА $\mathcal{N} = \langle Q, \Sigma, s, \Delta, F\rangle$, който разпознава езика $L(r)$, където $r = \emptyset$, $r = \varepsilon$ или $r = a$, за $a \in \Sigma$.

Док.



(а) $L(\emptyset)$ (б) $L(\varepsilon)$ (в) $L(a)$

$\square$

Лема 2. Класът на автоматните езици е затворен относно операцията **конкатенация**. Това означава, че ако L_1 и L_2 са два произволни автоматни езика, то $L_1 \cdot L_2$ също е автоматен език.

Док. Нека са дадени автоматите:

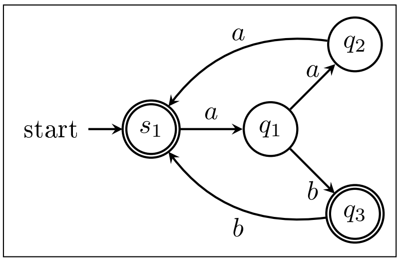
- $\mathcal{N}_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, \Delta_1, F_1 \rangle$, като $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1) = L_1$;
- $\mathcal{N}_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, \Delta_2, F_2 \rangle$, като $\mathcal{L}(\mathcal{N}_2) = L_2$.

Ще дефинираме автомата $\mathcal{N} = \langle Q, \Sigma, s, \Delta, F \rangle$ като

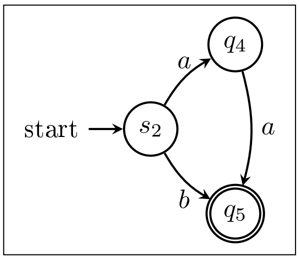
$$\mathcal{L}(\mathcal{N}) = L_1 \cdot L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{N}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{N}_2).$$

- $Q = Q_1 \cup Q_2$;
- $s = s_1$;
- $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2, & \text{ако } s_2 \in F_2 \\ F_2, & \text{иначе.} \end{cases}$
- $\Delta(q, a) = \begin{cases} \Delta_1(q, a), & \text{ако } q \in Q_1 \setminus F_1 \ \& \ a \in \Sigma \\ \Delta_2(q, a), & \text{ако } q \in Q_2 \ \& \ a \in \Sigma \\ \Delta_1(q, a) \cup \Delta_2(s_2, a), & \text{ако } q \in F_1 \ \& \ a \in \Sigma. \end{cases}$

$\square$

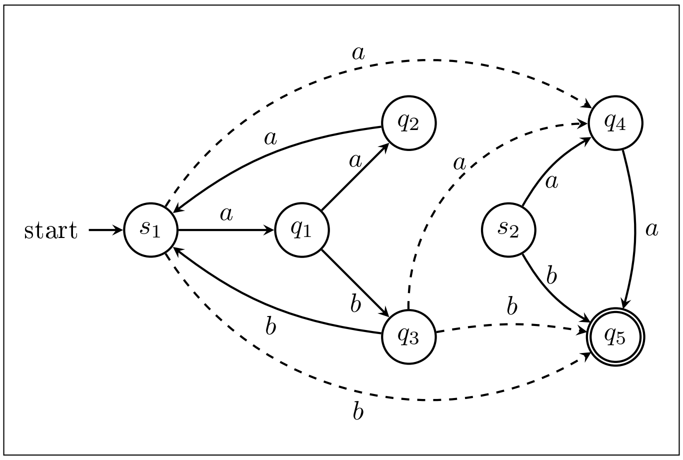


(а) автомат $\mathcal{N}_1$



(б) автомат $\mathcal{N}_2$

Пример 4. За да построим автомат, който разпознава конкатенацията на $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{N}_2)$, трябва да свържем финалните състояния на $\mathcal{N}_1$ с изходящите от s_2 състояния на $\mathcal{N}_2$.



Фигура 2.6: $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{N}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{N}_2)$

Обърнете внимание, че $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ са детерминирани автомати, но $\mathcal{N}$ е недетерминиран. Също така, в този пример се оказва, че вече s_2 е недостижимо състояние, но в общия случай не можем да го премахнем, защото може да има преходи влизащи в s_2.

Лема 3. Класът от автоматните езици е затворен относно операцията **обединение**.

Док. Нека са дадени автоматите:

- $\mathcal{N}_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, \Delta_1, F_1 \rangle$, като $L(\mathcal{N}_1) = L_1$;
- $\mathcal{N}_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, \Delta_2, F_2 \rangle$, като $L(\mathcal{N}_2) = L_2$.

Ще дефинираме автомата $\mathcal{N} = \langle Q, \Sigma, s, \Delta, F \rangle$, така че

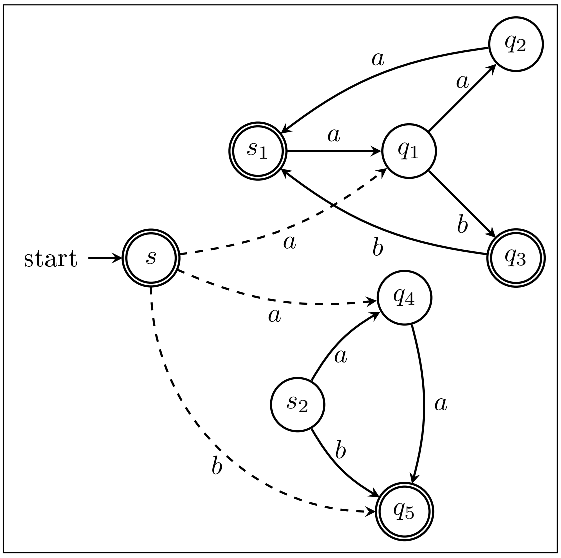
$$L(\mathcal{N}) = L(\mathcal{N}_1) \cup L(\mathcal{N}_2).$$

- $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{s\}$;
- $F = \begin{cases} F_1 \cup F_2 \cup \{s\}, & \text{ако } s_1 \in F_1 \vee s_2 \in F_2 \\ F_1 \cup F_2, & \text{иначе} \end{cases}$
- $\Delta(q, a) = \begin{cases} \Delta_1(q, a), & \text{ако } q \in Q_1 \ \&\ a \in \Sigma \\ \Delta_2(q, a), & \text{ако } q \in Q_2 \ \&\ a \in \Sigma \\ \Delta_1(s_1, a) \cup \Delta_2(s_2, a), & \text{ако } q = s \ \&\ a \in \Sigma. \end{cases}$

$\square$

Забележка. В началното състояние на новопостроения автомат $\mathcal{N}$ не влизат ребра.

Пример 5. За да построим автомат, който разпознава обединението на $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)$ и $\mathcal{L}(\mathcal{N}_2)$, трябва да свържем финалните състояния на $\mathcal{N}_1$ с изходящите от s_2 състояния на $\mathcal{N}_2$.



Фигура 2.7: $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{N}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{N}_2)$

Обърнете внимание, че $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ са детерминирани автомати, но $\mathcal{N}$ е недетерминиран. Освен това, новото състояние s трябва да бъде маркирано като финално, защото s_1 е финално.

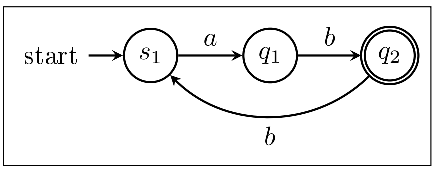
Лема 4. Класът от автоматните езици е затворен относно операцията **звезда на Клини**.

Док. Нека е даден автомата $\mathcal{N} = \langle Q, \Sigma, s, \Delta, F \rangle$, за който е изпънено, че $L(\mathcal{N}) = L(r)$. Първата стъпка е да построим $\mathcal{N}_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, \Delta_1, F_1 \rangle$, такъв че

$$L(\mathcal{N}_1) = \bigcup_{n \geq 1} (L(\mathcal{N}))^n = \bigcup_{n \geq 1} (L(r))^n = L(r^+).$$

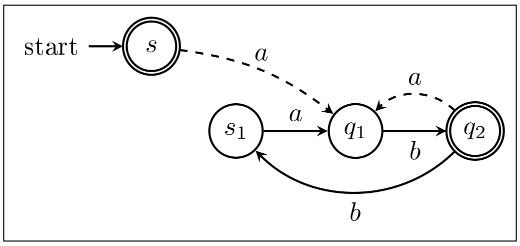
- $Q_1 = Q$;
- $s_1 = s$;
- $F_1 = F$;
- $\Delta_1(q, a) = \begin{cases} \Delta(q, a), & \text{ако } q \in Q \setminus F, a \in \Sigma \\ \Delta(q, a) \cup \Delta(s, a), & \text{ако } q \in F, a \in \Sigma. \end{cases}$

Накрая строим автомат $\mathcal{N}_2$, за който $L(\mathcal{N}_2) = \{\varepsilon\} \cup L(\mathcal{N}_1)$. $\square$



Фигура 2.8: автомат $\mathcal{N}_3$

Пример 6. Нека да приложим конструкцията за да намерим автомат разпознаващ $\mathcal{L}(\mathcal{N}_3)^\star$.



Фигура 2.9: $\mathcal{L}(\mathcal{N}) = \mathcal{L}(\mathcal{N}_3)^\star = \mathcal{L}(\mathcal{N}_3)^+ \cup \{\varepsilon\}$

Лесно се вижда, че $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1) = \{(abb)^n ab \mid n \in \mathbb{N}\}$. Формално погледнато, след като построим автомат за езика $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)^+$, трябва да приложим конструкцията за обединение на автомата за езика $\mathcal{L}(\mathcal{N}_1)^+$ с автомата за езика $\{\varepsilon\}$. Защо трябва да добавим ново начално състояние s? Да допуснем, че вместо това сме направили s_1 финално. Тогава има опасност да разпознаем повече думи. Например, думата abb би се разпонала от този автомат, но $abb \notin \mathcal{L}(\mathcal{N}_1)^\star$.

Задача 17. Да фиксираме една дума α над дадена азбука Σ. Опишете алгоритъм, който за вход произволен текстов файл β, отговаря дали думата α се среща в β. Каква е сложността на този алгоритъм относно дължините на α и β ?

(текстовият файл $\beta \in \Sigma^\star$)

2.4 Езици, които не са регулярни

Лема 5 (за покачването (регулярни езици))**.** Нека L да бъде регулярен език. Съществува число $p \geq 1$, зависещо само от L, за което за всяка дума $\alpha \in L, |\alpha| \geq p$ може да бъде записана във вида $\alpha = xyz$ и

На англ. се нарича Pumping Lemma

Има подобна лема и за безконтекстни езици

Обърнете внимание, че $0 \in \mathbb{N}$ и $xy^0z = xz$

1) $|y| \geq 1$;

2) $|xy| \leq p$;

3) $(\forall i \in \mathbb{N})[xy^iz \in L]$.

Док. Понеже L е регулярен, той се разпознава от $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$. Да положим $p = |Q|$ и нека $\alpha = a_1a_2\cdots a_k$ е дума, за която $k \geq p$. Да разгледаме първите p стъпки от изпълнението на α върху $\mathcal{A}$:

стр. 88 от [PL98], стр. 78 от [Sip97]

$$q_0 \stackrel{a_1}{\to} q_1 \stackrel{a_2}{\to} \cdots \stackrel{a_p}{\to} q_p.$$

Тъй като $|Q| = p$, а по този път участват $n+1$ състояния $q_0, q_1, \dots, q_p$, то съществуват числа i, j, за които $0 \leq i < j \leq p$ и $q_i = q_j$. Нека разделим думата α на три части по следния начин:

$$x = a_1 \cdots a_i, \quad y = a_{i+1} \cdots a_j, \quad z = a_{j+1} \cdots a_k.$$

Ясно е, че $|y| \geq 1$ и $|xy| = j \leq p$. Освен това, лесно се съобразява, че

✍ Докажете!

за всяко $i \in \mathbb{N}$, $xy^i z \in L$. Да разгледаме само случая за $i = 0$. Думата $xy^0 z = xz \in L$, защото имаме следното изчисление:

$$q_0 \xrightarrow{a_1} \cdots \xrightarrow{a_i} q_i \xrightarrow{a_{j+1}} q_{j+1} \cdots \xrightarrow{a_p} q_p \in F,$$

защото $q_i = q_j$. $\square$

При фиксиран език L, условието на *Лема* 5 може формално да се запише така:

$$(\exists p \geq 1)(\forall \alpha \in L)[|\alpha| \geq p \Rightarrow (\exists x, y, z \in \Sigma^\star)[\alpha = xyz \ \wedge \ |y| \geq 1 \ \wedge \ |xy| \leq p \ \wedge \ (\forall i \in \mathbb{N})[xy^i z \in L]]].$$

Отрицанието на горната формула може да се запише по следния начин:

$$(\forall p \geq 1)(\exists \alpha \in L)[|\alpha| \geq p \ \wedge (\forall x, y, z \in \Sigma^\star)[\alpha \neq xyz \ \vee \ |y| \not\geq 1 \ \vee \ |xy| \not\leq p \ \vee \ (\exists i \in \mathbb{N})[xy^i z \notin L]]],$$

което е еквивалентно на:

$$(\forall p \geq 1)(\exists \alpha \in L)[|\alpha| \geq p \ \wedge \ (\forall x, y, z \in \Sigma^\star)[(\alpha = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p) \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N})[xy^i z \notin L]]].$$

Лема 5 е полезна, когато искаме да докажем, че даден език L **не** е регулярен. За да постигнем това, ние доказваме **отрицанието** на условията от *Лема* 5 за L, т.е. за всяка константа $p \geq 1$, намираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, такава че за всяко разбиване на думата на три части, $\alpha = xyz$, със свойствата $|y| \geq 1$ и $|xy| \leq p$, е изпълнено, че $(\exists i)[xy^i z \notin L]$.

Пример 7. Езикът $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ **не** е регулярен.

Док. Да допуснем, че L е регулярен. Ще достигнем до противоречие като докажем отрицанието на условието на *Лема* 5, т.е. ще докажем, че

Това е важен пример. По-късно ще видим, че този език е безконтекстен

$$(\forall p \geq 1)(\exists \alpha \in L)[|\alpha| \geq p \ \wedge \ (\forall x, y, z \in \Sigma^\star)[(\alpha = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p) \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N})[xy^i z \notin L]].$$

Доказателството следва стъпките:

- Разглеждаме произволно число $p \geq 1$ (нямаме власт над избора на p).
- Избираме дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq p$. Имаме свободата да изберем каквото α си харесаме, стига то да принадлежи на L и да има дължина поне p. Щом имаме тази свобода, нека да изберем думата $\alpha = a^p b^p \in L$. Очевидно е, че $|\alpha| \geq p$.
- Разглеждаме произволно разбиване на α на три части, $\alpha = xyz$, за които изискваме свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$ (не знаем нищо друго за x, y и z освен тези две свойства).
- Ще намерим $i \in \mathbb{N}$, за което $xy^i z \notin L$. Понеже $|xy| \leq p$, то $y = a^k$, за $1 \leq k \leq p$. Тогава ако вземем $i = 0$, получаваме $xy^0 z = a^{p-k} b^p$. Ясно е, че $xz \notin L$, защото $p - k < p$.

Доказахме, че ако L е регулярен език, то свойствата от *Лема* 5 не са изпълнени. Следователно, езикът L не е регулярен. $\square$

Пример 8. Езикът $L = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{N} \ \& \ m < n\}$ **не** е регулярен.

Док. Да допуснем, че L е регулярен. Следваме същата процедура както в предишния пример. Доказателството следва стъпките:

- Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.
- Избираме дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq p$. Можем да изберем каквото α си харесаме, стига то да принадлежи на L и да има дължина поне p. Щом имаме тази свобода, нека да изберем думата $\alpha = a^p b^{p+1} \in L$. Очевидно е, че $|\alpha| \geq p$.
- Разглеждаме произволно разбиване на α на три части, $\alpha = xyz$, за които изискваме свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$ (не знаем нищо друго за x, y и z освен тези две свойства).
- Ще намерим $i \in \mathbb{N}$, за което $xy^iz \notin L$. Понеже $|xy| \leq p$, то $y = a^k$, за $1 \leq k \leq p$. Тогава ако вземем $i = 2$, получаваме

  $$xy^2z = a^{p-k}a^{2k}b^{p+1} = a^{p+k}b^{p+1}.$$

  Ясно е, че $xy^2z \notin L$, защото $p + k \geq p + 1$.

$\square$

Пример 9. Езикът $L = \{a^n \mid n \text{ е просто число}\}$ не е регулярен.

Док. Да допуснем, че L е регулярен език. Ще достигнем до противоречие като докажем отрицанието на условието на *Лема 5*, т.е. ще докажем, че

$$(\forall p \geq 1)(\exists \alpha \in L)[|\alpha| \geq p \;\wedge\; (\forall x, y, z \in \Sigma^\star)[(\alpha = xyz \wedge |y| \geq 1 \wedge |xy| \leq p) \Rightarrow (\exists i \in \mathbb{N})[xy^iz \notin L]].$$

Доказателството следва стъпките:

- Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.
- Избираме дума $w \in L$, за която $|w| \geq p$. Можем да изберем каквото w си харесаме, стига то да принадлежи на L и да има дължина поне p. Щом имаме тази власт, нека да изберем думата $w \in L$, такава че $|w| > p + 1$. Знаем, че такава дума съществува, защото L е безкраен език. По-долу ще видим защото този избор е важен за нашите разсъждения.
- Разглеждаме произволно разбиване на w на три части, $w = xyz$, за които изискваме свойствата $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$.
- Ще намерим i, за което $xy^iz \notin L$, т.е. ще намерим i, за което $|xy^iz| = |xz| + i \cdot |y|$ е ***съставно число***. Понеже $|xy| \leq p$ и $|xyz| > p+1$, то $|z| > 1$. Да изберем $i = |xz| > 1$. Тогава:

  $$|xy^iz| = |xz| + i.|y| = |xz| + |xz|.|y| = (1 + |y|)|xz|$$

  е съставно число, следователно $xy^iz \notin L$.

Доказахме, че ако L е регулярен език, то свойството за покачване от *Лема 5* не е изпълнено. Следователно, езикът L не е регулярен. $\square$

Задача 18. Докажете, че езикът $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен.

Док. Да допуснем, че L е регулярен. Отново ще докажем отрицанието на свойството за покачване от *Лема 5*. Доказателството има стъпките:

- Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.
- Избираме дума $w = a^{p^2}$.
- Разглеждаме произволно разбиване на w на три части, $w = xyz$, като $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$.
- Ще намерим i, за което $xy^iz \notin L$. В нашия случай това означава, че $|xz| + i \cdot |y|$ не е точен квадрат. Тогава за $i = 2$,

  $$p^2 = |xyz| < |xy^2z| = |xz| + 2|y| \leq p^2 + 2p < (p+1)^2.$$

  Получаваме, че $p^2 < |xy^2z| < (p+1)^2$, откъдето следва, че $|xy^2z|$ не е точен квадрат. Следователно, $xy^2z \notin L$.

□

Задача 19. Докажете, че езикът $L = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е регулярен.

Док.

- Разглеждаме произволно число $p \geq 1$.
- Избираме достатъчно дълга дума. Например, нека $\omega = a^{(p+2)!}$.
- Разглеждаме произволно разбиване на ω на три части, $\omega = xyz$, като $|xy| \leq p$ и $|y| \geq 1$. Да обърнем внимание, че $1 \leq |y| \leq p$
- Ще намерим i, за което $xy^iz \notin L$. В нашия случай това означава, че $|xz| + i \cdot |y|$ не е от вида $n!$. Възможно ли е $xy^0z \in L$? Понеже $|xyz| = (p+2)!$, това означава, че $|xz| = k!$, за някое $k \leq p+1$. Тогава

  $$|y| = |xyz| - |xz| = (p+2)! - k! \geq (p+2)! - (p+1)! = (p+1).(p+1)! > p.$$

  Достигнахме до противоречие.

□

2.4.1 Следствия от лемата за покачването

Твърдение 5. Нека е даден автомата $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$. Езикът $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ е непразен е **непразен** точно тогава, когато съдържа дума $\alpha, |\alpha| < |Q|$.

Док. Ще разгледаме двете посоки на твърдението.

($\Rightarrow$) Нека L е непразен език и нека $m = \min\{|\alpha| \mid \alpha \in L\}$. Ще докажем, че $m < |Q|$. За целта, да допуснем, че $m \geq |Q|$ и да изберем $\alpha \in L$, за която $|\alpha| = m$. Според *Лема 5*, съществува разбиване $xyz = \alpha$, такова че $xz \in L$. При положение, че $|y| \geq 1$, то $|xz| < m$, което е противоречие с минималността на m. Заключаваме, че нашето допускане е грешно. Тогава $m < |Q|$, откъдето следва, че съществува дума $\alpha \in L$ с $|\alpha| < |Q|$.

($\Leftarrow$) Тази посока е тривиална. Ако L съдържа дума α, за която $|\alpha| < |Q|$, то е очевидно, че L е непразен език.

$\square$

Следствие 2. Съществува алгоритъм, който определя дали два автомата $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ разпознават един и същ език.

$(L_1 \setminus L_2) \cup (L_2 \setminus L_1) = \emptyset$?

Твърдение 6. Регулярният език L, разпознаван от КДА $\mathcal{A}$, е **безкраен** точно тогава, когато съдържа дума α, $|Q| \leq |\alpha| < 2|Q|$.

Док. Да разгледаме двете посоки на твърдението.

($\Leftarrow$) Нека L е регулярен език, за който съществува дума α, такава че $|Q| \leq |\alpha| < 2|Q|$. Тогава от *Лема 5* следва, че съществува разбиване $\alpha = xyz$ със свойството, че за всяко $i \in \mathbb{N}$, $xy^iz \in L$. Следователно, L е безкраен, защото $|y| \geq 1$.

($\Rightarrow$) Нека L е безкраен език и да вземем ***най-късата*** дума $\alpha \in L$, за която $|\alpha| \geq 2|Q|$. Понеже L е безкраен, знаем, че такава дума съществува. Тогава отново по *Лема 5*, имаме следното разбиване на α:

$$\alpha = xyz,\ |xy| \leq |Q|,\ 1 \leq |y|,\ xz \in L.$$

Но понеже $|xyz| \geq 2|Q|$, а $1 \leq |y| \leq |Q|$, то $|xyz| > |xz| \geq |Q|$ и понеже избрахме $\alpha = xyz$ да бъде най-късата дума с дължина поне $2|Q|$, заключаваме, че $|Q| \leq |xz| < 2|Q|$ и $xz \in L$.

$\square$

Следствие 3. Съществува алгоритъм, който проверява дали даден регулярен език е безкраен.

Примери, когато лемата не е приложима

Задача 20. Да се даде пример за език L, който **не** е регулярен, но удовлетворява условието на *Лема 5*.

Например, $c^+\{a^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup (a|b)^\star$

Пример 10. Езикът $L = \{c^ka^nb^m \mid k, n, m \in \mathbb{N}\ \&\ k = 1 \implies m = n\}$ **не** е регулярен, но условието за покачване от *Лема 5* е изпълнено за него.

Док. Да допуснем, че L е регулярен. Тогава ще следва, че

$$L_1 = L \cap ca^\star b^\star = \{ca^nb^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

е регулярен, но с лемата за разрастването лесно се вижда, че L_1 не е.

Сега да проверим, че условието за покачване от *Лема 5* е изпълнено за L. Да изберем константа $p = 2$. Сега трябва да разгледаме всички думи $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq 2$ и за всяка α да посочим разбиване $xyz = \alpha$, за което са изпълнени трите свойства от лемата.

Условията за x, y, z са:

$|xy| \leq 2$
$|y| \geq 1$
$(\forall i \in \mathbb{N})(xy^iz \in L)$

- Ако $\alpha = a^n$ или $\alpha = b^n$, $n \geq 2$, то е очевидно, че можем да намерим такова разбиване.
- $\alpha = a^nb^m$ и $n + m \geq 2$, $n \geq 1$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = a$, $z = a^{n-1}b^m$.

- $\alpha = ca^n b^n$, $n \geq 1$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = c$, $z = a^n b^n$.
- $\alpha = c^2 a^n b^m$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = c^2$, $z = a^n b^m$.
- $\alpha = c^k a^n b^m$, $k \geq 3$. Избираме $x = \varepsilon$, $y = c$, $z = c^{k-1} a^n b^m$.

$\square$

2.5 Минимизация на ДКА

- Нека $L \subseteq \Sigma^\star$ е език и нека $x, y \in \Sigma^\star$. Казваме, че x и y са **еквивалентни относно** L, което записваме като $x \approx_L y$, ако е изпълнено:

  $$(\forall z \in \Sigma^\star)[xz \in L \ \leftrightarrow \ yz \in L].$$

  Това означава, че $x \approx_L y$ ако или и две думи са в L или и двете не са в L и освен това, като прибавим произволна дума на края на x и y, новополучените думи са или и двете в L или и двете не са в L.

$\approx_L$ е известна като релация на Майхил-Нероуд

- Нека $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F \rangle$ е ДКА. Казваме, че две думи $\alpha, \beta \in \Sigma^\star$ са **еквивалентни относно** $\mathcal{A}$, което означаваме с $\alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta$, ако

  $$\delta^\star(s, \alpha) = \delta^\star(s, \beta).$$

Трябва ли $\mathcal{A}$ да е тотален?

- Проверете, че $\approx_L$ и $\sim_{\mathcal{A}}$ са **релации на еквивалентност**, т.е. те са рефлексивни, транзитивни и симетрични.

- Класът на еквивалентност на думата α относно релацията $\approx_L$ означаваме като

  $$[\alpha]_L = \{\beta \in \Sigma^\star \mid \alpha \approx_L \beta\}.$$

  С $|\approx_L|$ ще означаваме броя на класовете на еквивалентност на релацията $\approx_L$.

- Класът на еквивалентност на думата α относно релацията $\sim_{\mathcal{A}}$ означаваме като

  $$[\alpha]_{\mathcal{A}} = \{\beta \in \Sigma^\star \mid \alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta\}.$$

  С $|\sim_{\mathcal{A}}|$ ще означаваме броя на класовете на еквивалентност на релацията $\sim_{\mathcal{A}}$.

- Съобразете, че всяко състояние на $\mathcal{A}$, което е достижимо от началното състояние, определя клас на еквивалентност относно релацията $\sim_{\mathcal{A}}$. Това означава, че ако за всяка дума означим $q_\alpha = \delta^\star_{\mathcal{A}}(s, \alpha)$, то $\alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta$ точно тогава, когато $q_\alpha = q_\beta$. Заключаваме, че броят на класовете на еквивалентност на $\sim_{\mathcal{A}}$ е равен на броя на достижимите от s състояния.

- Релациите $\approx_{\mathcal{L}}$ и $\sim_{\mathcal{A}}$ са дясно-инвариантни, т.е. за всеки две думи α и β е изпълнено:

  $$\alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta \implies (\forall \gamma \in \Sigma^\star)[\alpha\gamma \sim_{\mathcal{A}} \beta\gamma],$$
  $$\alpha \approx_{\mathcal{L}} \beta \implies (\forall \gamma \in \Sigma^\star)[\alpha\gamma \approx_{\mathcal{L}} \beta\gamma].$$

Теорема 3. Нека е даден ДКА $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F \rangle$ и $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ е езика, разпознаван от $\mathcal{A}$. Тогава е изпълнено

$$(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^\star)[\alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta \implies \alpha \approx_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \beta].$$

С други думи, $[\alpha]_{\mathcal{A}} \subseteq [\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$, за всяка дума $\alpha \in \Sigma^\star$.

Док. Да означим за всяка дума α, $q_\alpha = \delta^\star_{\mathcal{A}}(s, \alpha)$. Лесно се съобразява, че за всеки две думи α и β имаме

$$\begin{aligned} \alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta \ &\leftrightarrow\ \delta^\star(s,\alpha) = \delta^\star(s,\beta) && (\text{по деф. на } \sim_{\mathcal{A}}) \\ &\leftrightarrow\ q_\alpha = q_\beta. \end{aligned}$$

Нека $\alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta$. Ще проверим, че $\alpha \approx_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \beta$. За произволно $\gamma \in \Sigma^\star$ имаме:

$$\begin{aligned} \alpha\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) \ &\leftrightarrow\ \delta^\star(s, \alpha\gamma) \in F && (\text{по деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A})) \\ &\leftrightarrow\ \delta^\star(\delta^\star(s,\alpha), \gamma) \in F && (\text{по деф. на } \delta^\star) \\ &\leftrightarrow\ \delta^\star(q_\alpha, \gamma) \in F && (q_\alpha = \delta^\star(s,\alpha)) \\ &\leftrightarrow\ \delta^\star(q_\beta, \gamma) \in F && (q_\alpha = q_\beta,\ \text{защото } \alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta) \\ &\leftrightarrow\ \delta^\star(\delta^\star(s,\beta), \gamma) \in F && (q_\beta = \delta^\star(s,\beta)) \\ &\leftrightarrow\ \delta^\star(s, \beta\gamma) \in F && (\text{по деф. на } \delta^\star) \\ &\leftrightarrow\ \beta\gamma \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) && (\text{по деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A})). \end{aligned}$$

Заключаваме, че

$$(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^\star)[\alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta \implies \alpha \approx_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \beta].$$

□

Следствие 4. За всеки тотален ДКА $\mathcal{A}$ е изпълнено, че

$$|{\approx_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}}| \leq |{\sim_{\mathcal{A}}}|.$$

Док. Нека $A = \{[\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \mid \alpha \in \Sigma^\star\}$ и $B = \{[\alpha]_{\mathcal{A}} \mid \alpha \in \Sigma^\star\}$. Да разгледаме изображението $f : B \to A$, определено като $f([\alpha]_{\mathcal{A}}) = [\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$.

- Първо ще проверим, че f е **функция**, т.е. трябва да проверим, че

  $$(\forall \alpha, \beta \in \Sigma^\star)[\alpha \sim_{\mathcal{A}} \beta \implies f([\alpha]_{\mathcal{A}}) = f([\beta]_{\mathcal{A}})].$$

  Да допуснем, че съществуват думи α и β, такива че $[\alpha]_{\mathcal{A}} = [\beta]_{\mathcal{A}}$, но $f([\alpha]_{\mathcal{A}}) = [\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \neq [\beta]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} = f([\beta]_{\mathcal{A}})$. Понеже $\sim_{\mathcal{A}}$ релация на еквивалентност, от $[\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \neq [\beta]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$ следва, че $[\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \cap [\beta]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} = \emptyset$. От *Теорема 3* следва веднага, че това е невъзможно, защото

  $$\emptyset \neq [\alpha]_{\mathcal{A}} = [\beta]_{\mathcal{A}} \subseteq [\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \cap [\beta]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}.$$

- Очевидно е, че f е **сюрекция**, защото на всеки клас $[\alpha]_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$ съответства класа $[\alpha]_{\mathcal{A}}$. $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(f(b) = a)$

- От това, че $f : B \to A$ е сюрективна функция следва, че $|B| \leq |A|$. Защо? ✍ Обяснете!

□

Следствие 5. Нека L е произволен регулярен език L. Всеки тотален ДКА $\mathcal{A}$, който разпознава L има свойството

$$|Q| \geq |{\approx_L}|.$$

Док. Да изберем $\mathcal{A}$, който разпознава L, бъде такъв, че да **няма недостижими състояния**. Тъй като всяко достижимо състояние определя клас на еквивалентност относно $\sim_{\mathcal{A}}$, то получаваме, че $|Q| = |\sim_{\mathcal{A}}|$. Комбинирайки със *Следствие 4*,

$$|Q| = |\sim_{\mathcal{A}}| \geq |\approx_L|.$$

□

Така получаваме *долна граница* за броя на състоянията в тотален автомат разпознаващ езика L. Този брой е не по-малък от броя на класовете на еквивалентност на $\approx_L$.

2.5.1 Проверка за регулярност на език

Твърдение 7. Езикът L е регулярен точно тогава, когато релацията $\approx_L$ има *крайно много* класове на еквивалентност.

Док. Ако L е регулярен, то той се разпознава от някой ДКА $\mathcal{A}$, който има крайно много състояния и следователно крайно много класове на еквивалентност относно $\sim_{\mathcal{A}}$. Релацията $\approx_L$ е по-груба от $\sim_{\mathcal{A}}$ и има по-малко класове на еквивалентност. Следователно, $\approx_L$ има крайно много класове на еквивалентност.

За другата посока, ако $\approx_L$ има крайно много класове на еквивалентност, то можем да построим ДКА $\mathcal{A}$ както в доказателството на *Теорема 4*, който разпознава L. □

Това следствие ни дава още един начин за проверка дали даден език е регулярен. За разлика от *Лема 5*, сега имаме **необходимо и достатъчно условие**. При даден език L, ние разглеждаме неговата релация $\approx_L$. Ако тя има крайно много класове, то езикът L е регулярен. В противен случай, езикът L не е регулярен.

Пример 11. За езика $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ имаме, че $|\approx_L| = \infty$, защото

$$(\forall k, j \in \mathbb{N})[k \neq j \implies [a^k b]_L \neq [a^j b]_L].$$

Проверете, че $[a^k b]_L = \{a^k b, a^{k+1} b^2, \dots, a^{k+l} b^{l+1}, \dots\}$. Така получаваме, че релацията $\approx_L$ има безкрайно много класове на еквивалентност. Заключаваме, че този език **не** е регулярен.

Пример 12. За езика $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имаме, че $|\approx_L| = \infty$, защото

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[m \neq n \implies [a^{n^2}]_L \neq [a^{m^2}]_L].$$

Без ограничение на общността, да разгледаме $n < m$ и думата $\gamma = a^{2n+1}$. Тогава $a^{n^2}\gamma = a^{(n+1)^2} \in L$, но $m^2 < m^2 + 2n + 1 < (m+1)^2$ и следователно $a^{m^2}\gamma = a^{m^2+2n+1} \notin L$.

Пример 13. За езика $L = \{a^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$ имаме, че $|\approx_L| = \infty$, защото

$$(\forall m, n \in \mathbb{N})[m \neq n \implies [a^{n!}]_L \neq [a^{m!}]_L].$$

Без ограничение на общността, да разгледаме $n < m$ и думата $\gamma = a^{(n!)n}$. Тогава $a^{n!}\gamma = a^{(n+1)!} \in L$, но $m! < m! + (n!)n < m! + (m!)m = (m+1)!$ и следователно $a^{m!}\gamma = a^{m!+(n!)n} \notin L$.

Задача 21. Да разгледаме езика

$$L = \{a^{f_n} \mid f_0 = f_1 = 1 \ \&\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\}.$$

Докажете, че $|\approx_L| = \infty$.

2.5.2 Теорема за съществуване на МДКА

Определение 5. Нека $\mathcal{A}$ а тотален ДКА, за който $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Казваме, че $\mathcal{A}$ е **минимален** за езика L, ако $|Q_{\mathcal{A}}| = |\approx_L|$.

Теорема 4 (Майхил-Нероуд)**.** Нека $L \subseteq \Sigma^\star$ е регулярен език. Тогава съществува ДКА $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$, който разпознава L, с точно толкова състояния, колкото са класовете на еквивалентност на релацията $\approx_L$, т.е. $|Q| = |\approx_L|$.

на англ. Myhill-Nerode

Док. Да фиксираме регулярния език L. Ще дефинираме тотален ДКА $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$, разпознаващ L, като:

- $Q = \{[\alpha]_L \mid \alpha \in \Sigma^\star\}$;
- $s = [\varepsilon]_L$;
- $F = \{[\alpha]_L \mid \alpha \in L\} = \{[\alpha]_L \mid [\alpha]_L \cap L \neq \emptyset\}$;
- Определяме изображението δ като за всяка буква $x \in \Sigma$ и всяко състояние $[\alpha]_L \in Q$,
$$\delta([\alpha]_L, x) = [\alpha x]_L.$$

Първо, трябва да се уверим, че множеството от състояния Q е крайно, т.е. релацията $\approx_{\mathcal{L}}$ има крайно много класове на еквивалентност. И така, тъй като $\mathcal{L}$ е регулярен език, то той се разпознава от някой тотален ДКА $\mathcal{A}'$. От *Следствие 5* имаме, че $|Q^{\mathcal{A}'}| \geq |\approx_L|$. Понеже $Q^{\mathcal{A}'}$ е крайно множество, то $\approx_L$ има крайно много класове и следователно Q също е крайно множество.

Второ, трябва да се уверим, че изображението δ задава функция, т.е. да проверим, че за всеки две думи α, β и всяка буква x,

$$[\alpha]_L = [\beta]_L \implies \delta([\alpha]_L, x) = \delta([\beta]_L, x).$$

Но това се вижда веднага, защото от определението на релацията $\approx_L$ следва, че ако $\alpha \approx_L \beta$, то за всяка буква x, $\alpha x \approx_L \beta x$, т.е. $[\alpha x]_L = [\beta x]_L$ и

$$\begin{aligned}
[\alpha]_L = [\beta]_L &\implies [\alpha x]_L = [\beta x]_L && \text{(свойство на } \approx_L) \\
&\implies \delta([\alpha]_L, x) = [\alpha x]_L = [\beta x]_L = \delta([\beta]_L, x) && \text{(деф. на } \delta)
\end{aligned}$$

Така вече сме показали, че $\mathcal{A}$ е коректно зададен тотален ДКА. Остава да покажем, че $\mathcal{A}$ разпознава езика L, т.е. $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$. За целта, първо ще докажем едно помощно твърдение.

Твърдение 8. За всеки две думи α и β, $\delta^\star([\alpha]_L, \beta) = [\alpha\beta]_L$.

Док. Ще докажем това свойство с индукция по дължината на β.

- За $\beta = \varepsilon$ свойството следва директно от дефиницията на $\delta^\star$ като рефлексивно и транзитивно затваряне на δ, защото $\delta^\star([\alpha]_L, \varepsilon) = [\alpha]_L$.

- Нека $|\beta| = n + 1$ и да приемем, че сме доказали твърдението за думи с дължина n. Тогава $\beta = \gamma a$, където $|\gamma| = n$. Свойството следва от следните равенства:

$$\begin{aligned}
\delta^\star([\alpha]_L, \gamma a) &= \delta(\delta^\star([\alpha]_L, \gamma), a) && (\text{деф. на } \delta^\star)\\
&= \delta([\alpha\gamma]_L, a) && (\text{от } \textbf{И.П.} \text{ за } \gamma)\\
&= [\alpha\gamma a]_L && (\text{от деф. на } \delta)\\
&= [\alpha\beta]_L && (\beta = \gamma a).
\end{aligned}$$

□

За да се убедим, че $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$ е достатъчно да проследим еквивалентностите:

$$\begin{aligned}
\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) &\leftrightarrow \delta^\star(s, \alpha) \in F && (\text{от деф. на } \mathcal{L}(\mathcal{A}))\\
&\leftrightarrow \delta^\star([\varepsilon]_L, \alpha) \in F && (\text{по деф. } s = [\varepsilon]_L)\\
&\leftrightarrow \delta^\star([\varepsilon]_L, \alpha) = [\alpha]_L \ \& \ \alpha \in L && (\text{от деф. на } F)\\
&\leftrightarrow \alpha \in L && (\text{от последното твърдение}).
\end{aligned}$$

□

Определение 6. Нека $\mathcal{A}_1 = \langle Q_1, \Sigma, s_1, \delta_1, F_1 \rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, \delta_2, F_2 \rangle$. Казваме, че $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са **изоморфни**, което означаваме с $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$, ако съществува биекция $f : Q_1 \to Q_2$, за която:

- $f(s_1) = s_2$;
- $f[F_1] = \{f(q) \mid q \in F_1\} = F_2$;
- $(\forall a \in \Sigma)(\forall q \in Q_1)[f(\delta_1(q, a)) = \delta_2(f(q), a)]$.

Ще казваме, че f задава изоморфизъм на $\mathcal{A}_1$ върху $\mathcal{A}_2$.

Това означава, че два автомата $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ са изоморфни, ако можем да получим $\mathcal{A}_2$ като преименуваме състоянията на $\mathcal{A}_1$.

Следствие 6. Нека е даден регулярния език L. Всички минимални автомати за L са изоморфни на $\mathcal{A}_0$, автомата построен в теоремата на Нерод-Майхил.

Док. Нека $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F \rangle$ е произволен тотален автомат, за който $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$ и $|Q| = |{\approx_L}|$. Съобразете, че $\mathcal{A}$ е *свързан*, т.е. всяко състояние на $\mathcal{A}$ е достижимо от началното. Искаме да докажем, че $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_0$. Понеже $\mathcal{A}$ е свързан, за всяко състояние q можем да намерим дума ω_q, за която $\delta^\star(s, \omega_q) = q$. Да дефинираме изображението $f : Q \to [\approx_L]$ като $f(q) = [\omega_q]_L$. Ще докажем, че f задава изоморфизъм на $\mathcal{A}$ върху $\mathcal{A}_0$.

- Първо да съобразим, че ако $\delta^\star_{\mathcal{A}}(s, \alpha) = q$, то $[\omega_q]_L = [\alpha]_L$. Понеже $\delta^\star_{\mathcal{A}}(s, \alpha) = q = \delta^\star_{\mathcal{A}}(s, \omega_q)$, то $\omega_q \sim_{\mathcal{A}} \alpha$. От *Теорема 3* имаме, че

$$\omega_q \sim_{\mathcal{A}} \alpha \implies \omega_q \approx_L \alpha.$$

  Това означава, $[\omega_q]_L = [\alpha]_L$ и следователно f е определена коректно, т.е. f е **функция**.

- Ще проверим, че f е **инективна**, т.е.

$$(\forall q_1, q_2 \in Q)[q_1 \neq q_2 \implies f(q_1) \neq f(q_2)].$$

Да допуснем, че има състояния $q_1 \neq q_2$, за които

$$f(q_1) = [\omega_{q_1}]_L = [\omega_{q_2}]_L = f(q_2).$$

Тогава $\omega_{q_1} \not\sim_{\mathcal{A}} \omega_{q_2}$ и $\omega_{q_1} \approx_L \omega_{q_2}$. Но тогава от *Следствие* 5 получаваме, че $|\sim_{\mathcal{A}}| > |\approx_L|$, което противоречи с минималността на $\mathcal{A}$. ✍ Обяснете!

- За да бъде f **сюрективна** трябва за всеки клас $[\beta]_L$ да съществува състояние q, за което $f(q) = [\beta]_L$. Понеже $\mathcal{A}$ е свързан, съществува състояние q, за което $\delta^\star_{\mathcal{A}}(s, \beta) = q$. Вече се убедихме, че в този случай $\beta \approx_L \omega_q$, защото $\beta \sim_{\mathcal{A}} \omega_q$. Тогава $f(q) = [\omega_q]_L = [\beta]_L$.

- За последно оставихме проверката, че f наистина е **изоморфизъм**:

$$\begin{aligned}
f(\delta_{\mathcal{A}}(q,a)) &= f(\delta_{\mathcal{A}}(\delta^\star_{\mathcal{A}}(s,\omega_q),a)) && \text{(от избора на } \omega_q)\\
&= f(\delta^\star_{\mathcal{A}}(s,\omega_q a)) && \text{(от деф. на } \delta^\star_{\mathcal{A}})\\
&= [\omega_q a]_L && \text{(от деф. на } f)\\
&= \delta^\star_{\mathcal{A}_0}([\varepsilon]_L,\omega_q a) && \text{(от деф. на } \mathcal{A}_0)\\
&= \delta_{\mathcal{A}_0}(\delta^\star_{\mathcal{A}_0}([\varepsilon]_L,\omega_q),a) && \text{(от деф. на } \delta^\star_{\mathcal{A}_0})\\
&= \delta_{\mathcal{A}_0}([\omega_q]_L,a) && \text{(свойство на } \delta^\star_{\mathcal{A}_0})\\
&= \delta_{\mathcal{A}_0}(f(q),a) && (f(q) = [\omega_q]_L).
\end{aligned}$$

□

2.5.3 Алгоритъм за намиране на МДКА.

- Да фиксираме произволен тотален ДКА $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$.

- Казваме, че две състояния p, q на автомата са **еквивалентни**, означаваме $p \equiv_{\mathcal{A}} q$, ако

$$p \equiv_{\mathcal{A}} q \quad\leftrightarrow\quad (\forall \gamma \in \Sigma^\star)[\delta^\star(p,\gamma) \in F \quad\leftrightarrow\quad \delta^\star(q,\gamma) \in F].$$

- Релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$ между състояния на автомата $\mathcal{A}$ е релация на еквивалентност.

- Нека q_α е състоянието, което съответства на думата α в $\mathcal{A}$, т.е. $\delta^\star_{\mathcal{A}}(s, \alpha) = q_\alpha$. Тогава:

$$q_\alpha \equiv_{\mathcal{A}} q_\beta \quad\leftrightarrow\quad \alpha \approx_{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \beta.$$

Това означава, че ако в $\mathcal{A}$ няма недостижими състояния от началното състояние s, то $|\equiv_{\mathcal{A}}| = |\approx_{\mathcal{L}(\mathcal{A})}|$.

При даден език L и тотален ДКА $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$, който го разпознава, нашата цел е да построим нов ДКА $\mathcal{A}_0$, който има толкова състояния колкото са класовете на еквивалентност на релацията $\approx_{\mathcal{L}}$. Това ще направим като “слеем” състоянията на $\mathcal{A}$, които са еквивалентни относно релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$. Това означава, че всяко състояние на $\mathcal{A}_0$ ще отговаря на един клас на еквивалентност на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$. Проблемът с намирането на класовете на еквивалентност на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$ е кванторът $\forall\gamma \in \Sigma^\star$ в нейната дефиницията.

Алгоритъмът представлява намирането на релации $\equiv_n$, където

$$p \equiv_n q \;\leftrightarrow\; (\forall\gamma \in \Sigma^\star)[|\gamma| \leq n \;\rightarrow\; (\delta^\star(p,\gamma) \in F \quad\leftrightarrow\quad \delta^\star(q,\gamma) \in F)].$$

Релациите $\equiv_n$ представляват апроксимации на релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$. Обърнете внимание, че за всяко n, $\equiv_n$ е *по-груба* релация от $\equiv_{n+1}$, която на свой ред е по-груба от $\equiv_{\mathcal{A}}$. Алгоритъмът строи $\equiv_n$ докато не срещнем n, за което $\equiv_n = \equiv_{n+1}$. Тъй като броят на класовете на еквивалентност на $\equiv_{\mathcal{A}}$ е краен ($\leq |Q|$), то със сигурност ще намерим такова n, за което $\equiv_n = \equiv_{n+1}$. Тогава заключаваме, че $\equiv_{\mathcal{A}} = \equiv_n$.

Понеже единствената дума с дължина 0 е ε и по определение $\delta^\star(p,\varepsilon) = p$, лесно се съобразява, че $\equiv_0$ има два класа на еквивалентност. Единият е F, а другият е $Q \setminus F$.

Твърдение 9. За всеки две състояния $p, q \in Q$, и всяко n, $p \equiv_{n+1} q$ точно тогава, когато

а) $p \equiv_n q$ и

б) $(\forall a \in \Sigma)[\delta(q,a) \equiv_n \delta(p,a)]$.

Док. (стр. 99 от [PL98])

$$\begin{aligned}
p \equiv_{n+1} q \;&\leftrightarrow (\forall\gamma \in \Sigma^{\leq n+1})[\delta^\star(p,\gamma) \in F \;\leftrightarrow\; \delta^\star(q,\gamma) \in F] \\
&\leftrightarrow (\forall\gamma \in \Sigma^{\leq n})[\delta^\star(p,\gamma) \in F \;\leftrightarrow\; \delta^\star(q,\gamma) \in F] \;\wedge \\
&\quad\; (\forall a \in \Sigma)(\forall\gamma \in \Sigma^{\leq n})[\delta^\star(p,a\gamma) \in F \;\leftrightarrow\; \delta^\star(q,a\gamma) \in F] \\
&\leftrightarrow p \equiv_n q \;\&\; (\forall a \in \Sigma)[\delta(p,a) \equiv_n \delta(q,a)].
\end{aligned}$$

□

Нека е даден автомата $A = \langle Q, \Sigma, s, \delta, F\rangle$. След като сме намерили релацията $\equiv_{\mathcal{A}}$ за $\mathcal{A}$, строим автомата $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, s', \delta', F')$, където:

1) $Q' = \{[q]_{\equiv_{\mathcal{A}}} \mid q \in Q\}$;

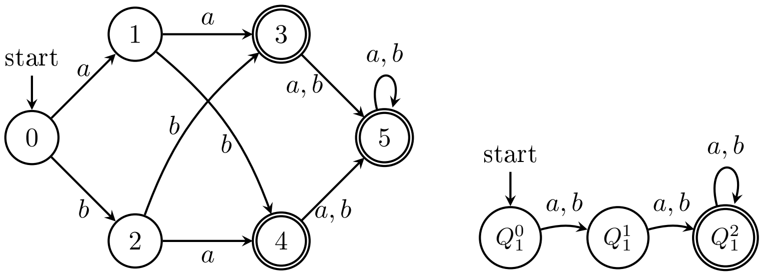
2) $s' = [s]_{\equiv_{\mathcal{A}}}$;

3) $\delta'([q]_{\equiv_{\mathcal{A}}}, a) = [\delta(q,a)]_{\equiv_{\mathcal{A}}}$;

4) $F' = \{[q]_{\equiv_{\mathcal{A}}} \mid F \cap [q]_{\equiv_{\mathcal{A}}} \neq \emptyset\}$;

От всичко казано дотук знаем, че $\mathcal{A}'$ е минимален автомат разпознаващ езика $\mathcal{L}(\mathcal{A})$.

Пример 14. Да разгледаме следния краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$.



(а) Ще построим минимален автомат разпознаващ $\mathcal{L}(\mathcal{A})$

(б) Получаваме следния минимален автомат $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{L}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$

Съобразете, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid |\alpha| \geq 2\}$.

Ще приложим алгоритъма за минимизация за да получим минималния автомат за езика L. За всяко $n = 0, 1, 2, \ldots$, ще намерим класовете на еквивалентност на $\equiv_n$, докато не намерим n, за което $\equiv_n = \equiv_{n+1}$.

- Класовете на еквивалентност на $\equiv_0$ са два. Те са $Q_0^0 = Q \setminus F = \{0, 1, 2\}$ и $Q_0^1 = F = \{3, 4, 5\}$.

- Сега да видим дали можем да разбием някои от класовете на еквивалентност на $\equiv_0$.

Q	0	1	2	$3^\star$	$4^\star$	$5^\star$
$\equiv_0$	Q_0^0	Q_0^0	Q_0^0	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1
a	Q_0^0	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1
b	Q_0^0	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1

Виждаме, че $0 \not\equiv_1 1$ и $1 \equiv_1 2$. Класовете на еквивалентност на $\equiv_1$ са $Q_1^0 = \{0\}$, $Q_1^1 = \{1, 2\}$, $Q_1^2 = \{3, 4, 5\}$.

- Сега да видим дали можем да разбием някои от класовете на еквивалентност на $\equiv_1$.

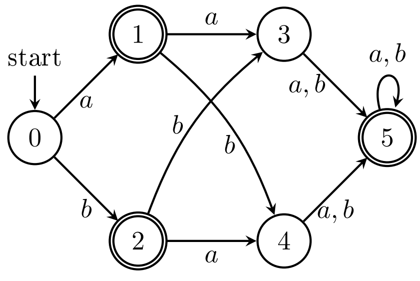
Q	0	1	2	$3^\star$	$4^\star$	$5^\star$
$\equiv_1$	Q_1^0	Q_1^1	Q_1^1	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2
a	Q_1^1	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2
b	Q_1^1	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2

Виждаме, че $\equiv_1 = \equiv_2$. Следователно, минималният автомат има три състояния. Той е изобразен на Фигура 2.10б. Минималният автомат може да се представи и таблично:

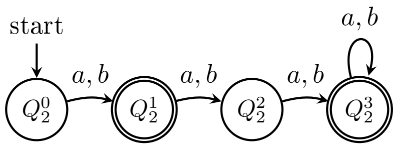
Получаваме, че $\equiv_{\mathcal{A}} = \equiv_1$

δ	Q_1^0	Q_1^1	Q_1^2
a	Q_1^1	Q_1^2	Q_1^2
b	Q_1^1	Q_1^2	Q_1^2

Пример 15. Да разгледаме следния краен детерминиран автомат $\mathcal{A}$.



(а) Ще построим минимален автомат разпознаващ $\mathcal{L}(\mathcal{A})$



(б) Получаваме следния минимален автомат $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{L}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$

Съобразете, че $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{a, b\} \cup \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid |\alpha| \geq 3\}$.

Отново следваме същата процедура за минимизация. Ще намерим класовете на еквивалентност на $\equiv_n$, докато не намерим n, за което $\equiv_n = \equiv_{n+1}$.

- Класовете на екиваленост на $\equiv_0$ са $Q_0^0 = Q \setminus F = \{0, 3, 4\}$ и $Q_0^1 = F = \{1, 2, 5\}$.

- Разбиваме класовете на еквивалентност на $\equiv_0$.

Q	0	$1^\star$	$2^\star$	3	4	$5^\star$
$\equiv_0$	Q_0^0	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^0	Q_0^0	Q_0^1
a	Q_0^1	Q_0^0	Q_0^0	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1
b	Q_0^1	Q_0^0	Q_0^0	Q_0^1	Q_0^1	Q_0^1

  Виждаме, че $1 \not\equiv_1 5$ и $1 \equiv_0 5$. Следователно, $\equiv_0 \neq \equiv_1$. Класовете на еквивалентност на $\equiv_1$ са $Q_1^0 = \{0, 3, 4\}$, $Q_1^1 = \{1, 2\}$, $Q_1^2 = \{5\}$.

- Сега се опитваме да разбием класовете на еквивалентност на $\equiv_1$.

Q	0	$1^\star$	$2^\star$	3	4	$5^\star$
$\equiv_1$	Q_1^0	Q_1^1	Q_1^1	Q_1^0	Q_1^0	Q_1^2
a	Q_1^1	Q_1^0	Q_1^0	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2
b	Q_1^1	Q_1^0	Q_1^0	Q_1^2	Q_1^2	Q_1^2

  Имаме, че $0 \equiv_1 3$, но $0 \not\equiv_2 3$. Следователно $\equiv_1 \neq \equiv_2$. Класовете на еквивалентност на $\equiv_2$ са $Q_2^0 = \{0\}$, $Q_2^1 = \{1, 2\}$, $Q_2^2 = \{3, 4\}$, $Q_2^3 = \{5\}$.

- Отново, опитваме да разбием класовете на $\equiv_2$.

Q	0	$1^\star$	$2^\star$	3	4	$5^\star$
$\equiv_2$	Q_2^0	Q_2^1	Q_2^1	Q_2^2	Q_2^2	Q_2^3
a	Q_2^1	Q_2^2	Q_2^2	Q_2^3	Q_2^3	Q_2^3
b	Q_2^1	Q_2^2	Q_2^2	Q_2^3	Q_2^3	Q_2^3

  Виждаме, че не можем да разбием Q_2^1 или Q_2^2. Следователно, $\equiv_2 = \equiv_3$ и минималният автомат разпознаващ езика L има четири състояния. Вижте Фигура 2.11б за преходите на минималния автомат. Минималният автомат може да се представи и таблично:

  Получаваме, че $\equiv_{\mathcal{A}} = \equiv_2$

δ	Q_2^0	Q_2^1	Q_2^2	Q_2^3
a	Q_2^1	Q_2^2	Q_2^3	Q_2^3
b	Q_2^1	Q_2^2	Q_2^3	Q_2^3

2.6 Автоматни граматики

Библиография

Основни източници в тази глава са:

- глави 2 и 3 от [HU79].
- глави 2,3 и 4 от [HMU01].
- Глава 1 от [Sip97].
- глава 2 от [PL98].
- Първа част на [Koz97]. Въпросът за минимизация на автомат е разгледан подробно.

2.7 Допълнителни задачи

Задача 22. Нека $\Sigma = \{a, b\}$. Проверете дали L е регулярен, където

а) $L = \{\alpha^R \mid \alpha \in L_0\}$, където L_0 е регулярен;

б) $L = \{a^i b^i \ \mid \ i \in \mathbb{N}\}$; $\alpha = a^p b^p$

в) $L = \{a^i b^i \ \mid \ i, j \in \mathbb{N} \ \& \ i \neq j\}$;

г) $L = \{a^i b^j \ \mid \ i > j\}$; $\alpha = a^{p+1} b^p$.

д) $L = \{a^n b^m \mid n \text{ дели } m\}$.

е) $L = \{a^{2n} \ \mid \ n \geq 1\}$;

ж) $L = \{a^m b^n a^{m+n} \ \mid \ m \geq 1 \ \& \ n \geq 1\}$;

з) $L = \{a^{n.m} \mid n, m \text{ са прости числа}\}$;

и) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) = N_b(\omega)\}$; $N_x(\omega)$ - брой срещания на буквата x в думата ω

к) $L = \{\omega\omega \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$; $\alpha = a^p b a^p b$

л) $L = \{\omega\omega^R \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$;

м) $L = \{\alpha\beta\beta \in \{a, b\}^\star \mid \beta \neq \varepsilon\}$;

н) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$;

о) $L = \{\omega\omega\omega \mid \omega \in \Sigma^\star\}$;

п) $L = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$;

р) $L = \{a^m b^n \mid n \neq m\}$;

с) $L = \{a^{n!} b^{n!} \mid n \neq 1\}$;

т) $L = \{a^{f_n} \mid f_0 = f_1 = 1 \ \& \ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\}$;

у) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid |n_a(\alpha) - n_b(\alpha)| \leq 2\}$;

ф) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid \alpha = \alpha\beta\alpha \ \& \ |\beta| \leq |\alpha|\}$;

х) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid \alpha = \beta\gamma\gamma^R \ \& \ |\beta| \leq |\gamma|\}$;

ц) $L = \{c^k a^n b^m \mid k, m, n > 0 \ \& \ n \neq m\}$;

ч) $L = \{c^k a^n b^n \mid k > 0 \ \& \ n \geq 0\} \cup \{a, b\}^\star$;

ш) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) \text{ не дели } N_b(\omega)\}$;

щ) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) < N_b(\omega)\}$;

ю) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) = 2N_b(\omega)\}$;

я) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid |N_a(\omega) - N_b(\omega)| \leq 3\}$.

Задача 23. Нека L е регулярен език. Докажете, че

$$\mathrm{Infix}(L) = \{\alpha \mid (\exists \beta, \gamma)[\beta\alpha\gamma \in L]\}$$

също е регулярен език.

Упътване. Най-лесно е да се построи автомат за $\mathrm{Infix}(L)$ като се използва автомата за L. □

Задача 24. Нека $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Да се докаже, че езика

от Владислав

$$L = \{a_1 a_2 \cdots a_{2n} \in \Sigma^\star \mid (\forall j \in [1, n])[a_{2j-1} = a_{2j}] \ \&\ d \text{ се среща} \leq 3 \text{ пъти}\}$$

е регулярен.

Задача 25. Нека L_1 и L_2 са регулярни езици. Докажете, че L също е регулярен език, където

$$L = \{\alpha \mid (\exists \beta, \gamma)[\beta\alpha\gamma \in L_1] \ \&\ \alpha \in L_2 \vee \alpha^R \in L_2\}.$$

Определение 7. Да фиксираме две азбуки Σ_1 и Σ_2. Хомоморфизъм е изображение $h : \Sigma_1^\star \to \Sigma_2^\star$ със свойството, че за всеки две думи $\alpha, \beta \in \Sigma_1^\star$,

$$h(\alpha\beta) = h(\alpha) \cdot h(\beta).$$

Лесно се съобразява, че за всеки хомоморфизъм h, $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

Задача 26. Нека $L \subseteq \Sigma_1^\star$ е регулярен език и $h : \Sigma_1^\star \to \Sigma_2^\star$ е хомоморфизъм. Тогава $h(L) = \{h(\alpha) \in \Sigma_2^\star \mid \alpha \in L\}$ е регулярен.

Упътване. Индукция по построението на регулярни езици. □

Задача 27. Нека $L \subseteq \Sigma_2^\star$ е регулярен език и $h : \Sigma_1^\star \to \Sigma_2^\star$ е хомоморфизъм. Тогава езикът $h^{-1}(L) = \{\alpha \in \Sigma_1^\star \mid h(\alpha) \in L\}$ е регулярен.

Упътване. Конструкция на автомат за $h^{-1}(L)$ при даден автомат за L. □

Задача 28. При дадени езици L, L' над азбуката Σ, да разгледаме:

[PL98] стр. 84

а) $\mathrm{Pref}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in \Sigma^\star)[\alpha\beta \in L]\}$;

б) $\mathrm{Suf}(L) = \{\beta \in \Sigma^\star \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[\alpha\beta \in L]\}$;

в) $\mathrm{Infix}(L) = \{\alpha \mid (\exists \beta, \gamma)[\beta\alpha\gamma \in L]\}$;

г) $\frac{1}{2}(L) = \{\omega \in \Sigma^\star \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[\omega\alpha \in L \ \&\ |\omega| = |\alpha|]\}$;

д) $L/L' = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\exists \beta \in L')[\alpha\beta \in L]\}$;

е) $\mathrm{Max}(L) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid (\forall \beta \in \Sigma^\star)[\beta \neq \varepsilon \implies \alpha\beta \notin L]\}$.

За всички тези езици, докажете, че са регулярни при условие, че L и L' са регулярни. Освен това, докажете, че L/L' е регулярен и при условието, че L е регулярен, но L' е произволен език.

Тази конструкция няма да бъде ефективна

Упътване.

а) Индукция по дефиницията на регулярен израз.

в) Най-лесно е да се построи автомат за $\mathrm{Infix}(L)$ като се използва автомата за L.

г) Конструкция с автомат за L и автомат за L^R.

$\square$

Задача 29. За даден език L над азбуката Σ, да разгледаме езиците:

а) $L' = \{\alpha \mid (\exists\beta \in \Sigma^\star)[|\alpha| = 2|\beta| \ \&\ \alpha\beta \in L]\}$;

б) $L'' = \{\alpha \mid (\exists\beta \in \Sigma^\star)[2|\alpha| = |\beta| \ \&\ \alpha\beta \in L]\}$;

в) $\frac{1}{3}(L) = \{\alpha \mid (\exists\beta,\gamma)[|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \ \&\ \alpha\beta\gamma \in L]\}$;

г) $\frac{2}{3}(L) = \{\beta \mid (\exists\beta,\gamma)[|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \ \&\ \alpha\beta\gamma \in L]\}$;

д) $\frac{3}{3}(L) = \{\gamma \mid (\exists\beta,\gamma)[|\alpha| = |\beta| = |\gamma| \ \&\ \alpha\beta\gamma \in L]\}$;

е) $\sqrt{L} = \{\alpha \mid (\exists\beta)[|\beta| = |\alpha|^2 \ \&\ \alpha\beta \in L]\}$.

Проверете ако L е регулярен, то кои от горните езици също са регулярни.

Задача 30. Да разгледаме езика ([Sip97], стр. 90)

$$L = \{\omega \in \{0,1\}^\star \mid \omega \text{ съдържа равен брой поднизове 01 и 10}\}.$$

Например, $101 \in L$, защото съдържа по веднъж 10 и 01. $1010 \notin L$, защото съдържа два пъти 10 и само веднъж 01. Докажете, че L е регулярен.

Задача 31. Да фиксираме азбука само с един символ $\Sigma = \{a\}$. Да положим за всяко $p, q \in \mathbb{N}$, ([Koz97], стр. 75; [PL98], стр. 89)

$$L(p,q) = \{a^k \mid (\exists n \in \mathbb{N})[k = p + q \cdot n]\}.$$

Ако за един език L съществуват константи $p_1, \dots, p_k$ и $q_1, \dots, q_k$, такива че

$$L = \bigcup_{1 \le i \le k} L(p_i, q_i),$$

то казваме, че L е *породен от аритметични прогресии*.

а) Докажете, че $L \subseteq \{a\}^\star$ е регулярен език точно тогава, когато L е породен от аритметична прогресия.

б) За произволна азбука Σ, докажете, че ако $L \subseteq \Sigma^\star$ е регулярен език, то езикът $\{a^{|\omega|} \mid \omega \in L\}$ е породен от аритметична прогресия.

Упътване.

а) За едната посока, разгледайте КДА за L.

б) За втората част, разгледайте $h : \Sigma \to \{a\}$ деф. като $(\forall b \in \Sigma)[h(b) = a]$. Докажете, че h е поражда хомоморфизъм между $\Sigma^\star$ и $\{a\}^\star$. Тогава $h(L) = \{a^{|\omega|} \mid \omega \in L\}$, а ние знаем, че регулярните езици са затворени относно хомоморфни образи.

$\square$

Задача 32. Да разгледаме азбуката:

$$\Sigma_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Докажете, че $L = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \Sigma_3^\star \mid \alpha_{(2)} + \beta_{(2)} = \gamma_{(2)} \right\}$ е автоматен език.

Задача 33. Да разгледаме азбуката:

$$\Sigma_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Една дума над азбуката Σ_2 ни дава два реда от 0-ли и 1-ци, които ще разглеждаме като числа в двоична бройна система. Да разгледаме езиците:

- $L_1 = \{\omega \in \Sigma_2^\star \mid$ долният ред на ω е по-голямо число от горния ред$\}$;
- $L_2 = \{\omega \in \Sigma_2^\star \mid$ долният ред на ω е три пъти по-голямо число от горния$\}$;
- $L_3 = \{\omega \in \Sigma_2^\star \mid$ долният ред на ω е обратния низ на горния ред$\}$.

Докажете, че L_1 и L_2 са автоматни, а L_3 не е автоматен.

Глава 3

Безконтекстни езици и стекови автомати

3.1 Безконтекстни граматики

Определение 8. Безконтекстна граматика е четворка от вида

$$G = (V, \Sigma, R, S),$$

където

- V е крайно множество от *променливи*;
- Σ е крайно множество от *букви*, $\Sigma \cap V = \emptyset$;
- $R \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^\star$, крайно множество от *правила*;
- $S \in V$ е началната променлива.

На англ. **context-free grammar**

Други срещани наименования на български са **контекстно-свободна**, **контекстно-независима**

Променливите се наричат също нетерминали

Буквите се наричат също терминали.

При дадена граматика G, за правилата на граматиката обикновено ще пишем $A \to \alpha$ вместо $(A, \alpha) \in R$. Ще въведем и релация между думи $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star$, която ще казва, че думата β се получаава от α като приложим правло от граматиката. За две думи $u, v \in (V \cup \Sigma)^\star$ ще пишем $u \to_G v$, ако съществуват думи $x, y \in (\Sigma \cup V)^\star$, $A \in V$, правило $A \to \alpha$ и $u = xAy$, $v = x\alpha y$. С $\to_G^\star$ ще означаваме рефлексивното и транзитивно затваряне на релацията $\to_G$.

Езикът породен от граматиката G е множеството от думи

$$\mathcal{L}(G) = \{\alpha \in \Sigma^\star \mid S \to_G^\star \alpha\}.$$

Задача 34. Докажете, че езикът $L = \{a^m b^n c^k \mid m+n \geq k\}$ е безконтекстен.

Док. Да разгледаме граматиката G с правила

$$S \to aSc|aS|B$$
$$B \to bBc|bB|\varepsilon.$$

Лесно се вижда с индукция по n, че за всяко n имаме свойствата:

✍ Докажете!

- $S \to^\star a^n S c^n$,
- $S \to^\star a^n S$,
- $B \to^\star a^n B c^n$,
- $B \to^\star b^n B$.

Комбинирайки горните свойства, можем да видим, че за всяко $n \geq k$,

- $S \to^\star a^n S c^k$,
- $B \to^\star b^n B c^k$.

За да докажем, че $L \subseteq L(G)$, да разгледаме една дума $\omega \in L$, т.е. $\omega = a^m b^n c^k$, където $m + n \geq k$. Имаме два случая:

- $k \leq m$, т.е. $m = k + l$ и $m + n = k + l + n$. Тогава имаме изводите:

  $$S \to^\star a^k S c^k,\ S \to^\star a^l S,\ S \to B,\ B \to^\star b^n B,\ B \to \varepsilon.$$

  Обединявайки всичко това, получаваме:

  $$S \to^\star a^m b^n c^k.$$

- $k > m$, т.е. $k = m + l$, за някое $l > 0$, и $m + n = k + r = m + l + r$, за някое r. Тогава имаме изводите:

  $$S \to^\star a^m S c^m,\ S \to B,\ B \to^\star b^l B c^l,\ B \to b^r B,\ B \to \varepsilon,$$

  и отново получаваме $S \to^\star a^m b^n c^k$.

Така доказахме, че $\omega \in \mathcal{L}(G)$.

Сега ще докажем, че $\mathcal{L}(G) \subseteq L$. С индукция по дължината на извода l, ще докажем, че ако $S \xrightarrow{l} \omega$, то $\omega \in M$, където

$$M = \{a^n S c^k \mid n \geq k\} \cup \{a^n b^m B c^k \mid n + m \geq k\} \cup \{a^n b^m c^k \mid n + m \geq k\}.$$

Ако $l = 0$, то е ясно, че $S \xrightarrow{0} S$ и $S \in M$.

Нека $l > 0$ и $S \xrightarrow{l-1} \alpha \to \omega$. От **И.П.** имаме, че $\alpha \in M$. Нека ω се получава от α с прилагане на правилото $C \to \gamma$. Разглеждаме всички варианти за думата $\alpha \in M$ и за правилото $C \to \gamma$ в граматиката G за да докажем, че $\omega \in M$. Удобно е да представим всички случаи в таблица.

$\alpha \in M$	$C \to \gamma$	$\omega \in M?$
$a^n S c^k$	$S \to aSc$	$a^{n+1} S c^{k+1}$
$a^n S c^k$	$S \to aS$	$a^{n+1} S c^k$
$a^n S c^k$	$S \to B$	$a^n B c^k$
$a^n b^m B c^k$	$B \to bBc$	$a^n b^{m+1} B c^{k+1}$
$a^n b^m B c^k$	$B \to bB$	$a^n b^{m+1} B c^k$
$a^n b^m B c^k$	$B \to \varepsilon$	$a^n b^m c^k$

Във всички случаи се установява, че $\omega \in M$. Сега, за всяка дума $\omega \in L(G)$ следва, че

$$\omega \in \Sigma^\star \cap M = \{a^m b^n c^k \mid m + n \geq k\}.$$

$\square$

Задача 35. Докажете, че езикът $L = \{a^m b^n c^k \mid m + n \geq k + 1\}$ е безконтекстен.

$S \rightarrow aS \mid aSc \mid aB \mid bB$
$B \rightarrow bB \mid bBc \mid \varepsilon$

Задача 36. Нека ω е произволна дума над азбуката $\{a, b\}$. Тогава:

а) ако $n_a(\omega) = n_b(\omega) + 1$, то съществуват думи ω_1, ω_2, за които $\omega = \omega_1 a \omega_2$, $n_a(\omega_1) = n_b(\omega_1)$ и $n_a(\omega_2) = n_b(\omega_2)$.

б) ако $n_b(\omega) = n_a(\omega) + 1$, то съществуват думи ω_1, ω_2, за които $\omega = \omega_1 b \omega_2$, $n_a(\omega_1) = n_b(\omega_1)$ и $n_a(\omega_2) = n_b(\omega_2)$.

Док. Пълна индукция по дължината на думата ω, за които $n_a(\omega) = n_b(\omega) + 1$.

- $|\omega| = 1$. Тогава $\omega_1 = \omega_2 = \varepsilon$ и $\omega = a$.
- $|\omega| = n+1$. Ще разгледаме два случая, в зависимост от първия символ на ω.
  - Случаят $\omega = a\omega'$ е лесен. (Защо?)
  - Интересният случай е $\omega = b\omega'$. Тогава $\omega = b^{i+1} a \omega'$. Да разгледаме думата ω'', която се получава от ω като премахнем първото срещане на думата ba, т.е. $\omega'' = b^i \omega'$ и $|\omega''| = n - 1$. Понеже от ω сме премахнали равен брой a-та и b-та, $n_a(\omega'') = n_b(\omega'') + 1$. Според **И.П.** за ω'', можем да запишем думата като $\omega'' = \omega_1'' a \omega_2''$ и $n_a(\omega_1'') = n_b(\omega_1'')$, $n_a(\omega_2'') = n_b(\omega_2'')$. Понеже b^i е префикс на ω_1'', за да получим обратно ω, трябва да прибавим премахнатата част ba веднага след b^i в ω_1''.

$\square$

Задача 37. За произволна дума $\omega \in \{a, b\}^\star$, докажете, че ако $n_a(\omega) > n_b(\omega)$, то съществуват думи ω_1 и ω_2, за които $\omega = \omega_1 a \omega_2$ и $n_a(\omega_1) \geq n_b(\omega_1)$, $n_a(\omega_2) \geq n_b(\omega_2)$.

Задача 38. Да се докаже, че езикът $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid n_a(\alpha) = n_b(\alpha)\}$ е безконтекстен.

Док. Една възможна граматика G е следната:

$$S \rightarrow aSbS | bSaS | \varepsilon.$$

Алтернативна граматика за езика L е

$$S \rightarrow aB | bA$$
$$A \rightarrow a | aS | bAA$$
$$B \rightarrow b | bS | aBB$$

Например, да разгледаме извода на думата $aabbba$ в тази граматика:

$$S \rightarrow aSbS \rightarrow aaSbSbS \rightarrow aa\varepsilon bSbS \rightarrow aab\varepsilon bS \rightarrow aabbbSaS$$
$$\rightarrow aabbb\varepsilon aS \rightarrow aabbba.$$

Като следствие от *Задача 36* може лесно да се изведе, че за думи ω, за които $n_a(\omega) = n_b(\omega)$, е изпълнено следното:

а) ако $\omega = a\omega'$, то $\omega = a\omega_1 b \omega_2$ и $n_a(\omega_1) = n_b(\omega_1)$, $n_a(\omega_2) = n_b(\omega_2)$;

б) ако $\omega = b\omega'$, то $\omega = b\omega_1 a \omega_2$ и $n_a(\omega_1) = n_b(\omega_1)$, $n_a(\omega_2) = n_b(\omega_2)$.

Сега първо ще проверим, че $L \subseteq L(G)$. За целта ще докажем с *пълна индукция* по дължината на думата ω, че за всяка дума ω със свойството $n_a(\omega) = n_b(\omega)$ е изпълнено $S \to^\star \omega$.

- Нека $|\omega| = 0$. Тогава $S \to \varepsilon$.
- Нека $|\omega| = k + 1$. Имаме два случая.
  - $\omega = a\omega'$, т.е. от свойство а), $\omega = a\omega_1 b\omega_2$ и $n_a(\omega_1) = n_b(\omega_1)$, $n_a(\omega_2) = n_b(\omega_2)$. Тогава $|\omega_1| \leq k$ и по И.П. $S \to^\star \omega_1$. Аналогично, $S \to^\star \omega_2$. Понеже имаме правило $S \to aSbS$, заключаваме че $S \to^\star a\omega_1 b\omega_2$.
  - $\omega = b\omega'$, т.е. свойство б), $\omega = b\omega_1 a\omega_2$ и $n_a(\omega_1) = n_b(\omega_1)$, $n_a(\omega_2) = n_b(\omega_2)$. Този случай се разглежда аналогично.

Преминаваме към доказателството на другата посока, т.е. $L(G) \subseteq L$. Тук с индукция по дължината на извода l ще докажем, че $S \overset{l}{\to} \omega$, то $\omega \in M$, където

$$M = \{\omega \in \{a, b, S\}^\star \mid n_a(\omega) = n_b(\omega)\}.$$

За $l = 0$ е ясно, че $S \overset{0}{\to^\star} S$. За $l = k+1$, то $S \overset{k}{\to^\star} \alpha \to \omega$. От **И.П.** имаме, че $\alpha \in M$. Нека ω се получава от α с прилагане на правилото $C \to \gamma$. Разглеждаме всички варианти за думата $\alpha \in M$ и за правилото $C \to \gamma$ в граматиката G за да докажем, че $\omega \in M$. Удобно е да представим всички случаи в таблица.

α	$C \to \gamma$	ω
$\in M$	$S \to aSbS$	$\in M$
$\in M$	$S \to bSaS$	$\in M$
$\in M$	$S \to \varepsilon$	$\in M$

Във всички случаи лесно се установява, че $\omega \in M$. Така за всяка дума $\omega \in L(G)$ следва, че

$$\omega \in \Sigma^\star \cap M = L.$$

□

Задача 39. Докажете, че следните езици са безконтекстни.

а) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^\star\}$; $S \to aSa \mid bSb \mid \varepsilon$

б) $L = \{w \in \{a,b\}^\star \mid w = w^R\}$; $S \to aSa \mid bSb \mid a| \ b \mid \varepsilon$

в) $L = \{a^n b^{2m} c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$;

г) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$;

д) $L = \{a^n b^{2k} \mid n, k \in \mathbb{N} \ \& \ n \neq k\}$;

е) $L = \{a^n b^k \mid n > k\}$; $S \to aSb|aS|a$

ж) $L = \{a^n b^k \mid n \geq 2k\}$;

з) $L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$; $S \to aSc|B, \ B \to bBc|\varepsilon$

и) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \geq m\}$; $S \to aSc|aS|B,\ B \to bBc|bB|\varepsilon$

к) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \geq m + 1\}$; $S \to aSc|aS|aB|bB,$ $B \to bBc|bB|\varepsilon$

л) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \geq m + 2\}$;

м) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k + 1 \geq m\}$; $S \to aSc|aS|B|Bc,$ $B \to bBc|bB|\varepsilon$

н) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k + 2 \geq m\}$;

о) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \leq m\}$;

п) $L = \{a^n b^k c^m \mid n + k \leq m + 1\}$;

р) $L = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k$ не са страни на триъгълник$\}$. Обединение на три езика

с) $L = \{a, b\}^\star \setminus \{a^{2n} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

т) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid n_a(\alpha) = n_b(\alpha) + 1\}$; $S \to EaE,\ E \to aEbE|bEaE|\varepsilon$

у) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid n_a(\alpha) \geq n_b(\alpha)\}$; $S \to E|SaS,$ $E \to aEbE|bEaE|\varepsilon$

ф) $L = \{\alpha \in \{a, b\}^\star \mid n_a(\alpha) > n_b(\alpha)\}$;

х) $L = \{\omega_1 a \omega_2 b \mid \omega_1, \omega_2 \in \{a, b\}^\star \ \&\ |\omega_1| = |\omega_2|\}$;

ц) $L = \{\alpha c \beta \mid \alpha, \beta \in \{a, b\}^\star \ \&\ \alpha^R$ е поддума на $\beta\}$.

Задача 40. Да разгледаме граматиката $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$, където $V = \{S, A, B\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, а правилата R са (от Владислав)

$$S \to AA|B, A \to B|bb, B \to aa|aB.$$

Да се намери езика на тази граматика и да се докаже, че граматиката разпознава точно този език.

Задача 41. Докажете, че следните езици са безконтекстни:

а) $L_1 = \{\omega_1 a \omega_2 \mid \omega_1, \omega_2 \in \{b, c\}^\star \ \&\ |\omega_1| = |\omega_2|\}$;

б) $L_2 = \{\omega_1 a \omega_2 a \cdots a \omega_n \mid n \geq 2 \ \&\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n \in \{b, c\}^\star \ \&\ |\omega_1| = |\omega_2|\}$;

в) $L_3 = \{\omega_1 a \omega_2 a \cdots a \omega_n \mid n \geq 2 \ \&\ \omega_1, \ldots, \omega_n \in \{b, c\}^\star \ \&\ (\exists i, j)[i \neq j \ \&\ |\omega_i| = |\omega_j|]\}$.

3.2 Езици, които не са безконтекстни

Лема 6 (за покачването (безконтекстни езици))**.** За всеки безконтекстен език L съществува $p > 0$, такова че ако $\alpha \in L, |\alpha| \geq p$, то съществува разбиване на думата на пет части, $\alpha = xyuvw$, за което е изпълнено: (стр. 123 от [Sip97]; стр. 125 от [HU79])

1) $|yv| \geq 1$,

2) $|yuv| \leq p$, и

3) $(\forall i \geq 0)[xy^i uv^i w \in L]$.

Док. Нека G е граматиката за езика L. Нека

За простота, можем да си мислим, че G е в НФЧ. Тогава $b = 2$.

$$b = \max\{|\beta| \mid A \rightarrow_G \beta\}.$$

Можем да приемем, че $b \geq 2$. Това означава, че във всяко дърво на извод, всеки възел има не повече от b наследника. Нека $p = b^{|V|} + 1$. Ще покажем, че p е константа на покачването за граматиката G. Това означава, че всяка дума с дължина поне p в езика L има дърво на извод с височина поне $|V|+1$.

Възлите във вътрешността на дървото са променливи, а листата са букви или ε

Нека $|\alpha| \geq p$ и T е дърво на извода за думата α. Понеже думата α може да има много дървета на извод, нека T също така да бъде *с минимален брой възли*. От направените по-горе разсъждения е ясно, че височината на T е поне $|V|+1$, Следователно, по най-дългия път π в T имаме поне $|V|+2$ възела, от които поне $|V|+1$ са променливи, защото само листата могат да не са променливи. Да разгледаме последните $|V|+1$ променливи по пътя π. От принципа на Дирихле следва, че измежду тези $|V|+1$ променливи има поне една повтаряща се. Нека R да бъде една такава променлива. Последните две повтаряния на R разделят думата α на пет части. Нека $\alpha = xyuvw$.

1) $|yv| \geq 1$, защото ако допуснем, че $|yv| = 0$, то ще достигнем до противоречие с минималността на T.

2) $|yuv| \leq p$, защото сме избрали най-долното R.

3) $xy^iuv^iw \in L$, защото можем да заменим поддървото с корен последното R за поддървото с корен предпоследното R. В случая $i = 0$, правим обратното.

$\square$

Следствие 7. Нека G е безконтекстна граматика и p е константата на покачването за G, $L = \mathcal{L}(G)$. Тогава $|L| = \infty$ точно тогава, когато съществува $\alpha \in L$, за която $p \leq |\alpha| < 2p$.

✍ Докажете!

Лема 6 е полезна, когато искаме да докажем, че даден език L **не** е безконтекстен. За целта, доказваме отрицанието на *Лема 6* за L, т.е. за всяка константа p, ние намираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$, такава че за всяко разбиване на думата на пет части, $\alpha = xyuvw$, със свойствата $|yv| \geq 1$ и $|yuv| \leq p$, е изпълнено, че $(\exists i)[xy^iuv^iw \notin L]$.

Пример 16. Езикът $L = \{a^nb^nc^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен.

Док.

- Разглеждаме произволна константа $p \geq 1$.
- Избираме дума $\alpha \in L$, $|\alpha| \geq p$. В случая, нека $\alpha = a^pb^pc^p$.
- Разглеждаме произволно разбиване $xyuvw = \alpha$, за което $|xyv| \leq p$ и $1 \leq |yv|$.
- Трябва да изберем i, за което $xy^iuv^iw \notin L$. Знаем, че поне едно от y и v не е празната дума. Имаме няколко случая за y и v.

– y и v са думи съставени от една буква. В този случай получаваме, че xy^2uv^2w има различен брой букви a, b и c.

– y или v е съставена от две букви. Тогава е възможно да се окаже, че xy^2uv^2w да има равен брой a, b и c, но тогава редът на буквите е нарушен.

– понеже $|yuv| \leq p$, то не е възможно в y или v да се срещат и трите букви.

Оказа се, че във всички възможни случаи за y и v, $xy^2uv^2w \notin L$.

Следователно, езикът L не е безконтекстен. □

Пример 17. Приложете лемата за разрастването за да докажете, че езикът L не е безконтекстен, където:

а) $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \leq i \leq j \leq k\}$;

б) $L = \{\beta\beta \mid \beta \in \{a, b\}^\star\}$;

в) $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Док.

а) Да фиксираме думата $\alpha = a^p b^p c^p$ и да разгледаме едно произволно нейно разбиване, $\alpha = xyuvw$, за което $|yuv| \leq p$ и $1 \leq |yv|$. Знаем, че поне една от y и v не е празната дума.

- y и v са съставени от една буква. Имаме три случая.
  - i) a не се среща в y и v. Тогава xy^0vu^0w съдържа повече a от b или c.
  - ii) b не се среща в y и v. Ако a се среща в y или v, тогава xy^2uv^2w съдържа повече a от b Ако c се среща в y или v, тогава xy^0uv^0w съдържа по-малко c от b.
  - iii) c не се среща в y и v. Тогава xy^2uv^2w съдържа повече a или b от c.
- y или v е съставена от две букви. Тук разглеждаме xy^2uv^2w и съобразяваме, че редът на буквите е нарушен.

б) Разгледайте $\alpha = a^p b^p a^p b^p$, т.е. $\beta = a^p b^p$ и $\alpha = \beta\beta$. Нека $xyuvw = \alpha$ е произволно разбиване на α, за което е изпълнено, че $|yuv| \leq p$ и $1 \leq |yv|$.

Защо $\alpha = a^p b a^p b$ не е добър кандидат?

- Ако yuv е в първата част на думата, то $xy^0uv^0w = a^i b^j a^p b^p \notin L$. Аналогично ако yuv е във втората част на думата.
- Ако yuv е в двете части на думата, то $xy^0uv^0w = a^p b^i a^j b^p \notin L$.

в) Решава се аналогично както за регулярни езици.

□

Теорема 5. Безконтекстните езици **не** са затворени относно сечение и допълнение.

Док. Да разгледаме езика

$$L_0 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\},$$

за който вече знаем от Пример 16, че не е безконтекстен. Да вземем също така и безконтекстните езици ✍ Защо са безконтекстни?

$$L_1 = \{a^n b^n c^m \mid n, m \in \mathbb{N}\},\ L_2 = \{a^m b^n c^n \mid n, m \in \mathbb{N}\},$$

- Понеже $L_0 = L_1 \cap L_2$, то заключаваме, че безконтекстните езици не са затворени относно операцията сечение.
- Да допуснем, че безконтекстните езици са затворени относно операцията допълнение. Тогава $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ са безконтекстни. Знаем, че безконтекстните езици са затворени относно обединение. Следователно, езикът $L_3 = \overline{L}_1 \cup \overline{L}_2$ също е безконтекстен. Ние допуснахме, че безконтекстните са затворени относно допълнение, следователно $\overline{L}_3$ също е безконтекстен. Но тогава получаваме, че езикът Озн. $\overline{L} = \Sigma^\star \setminus L$

  $$L_0 = L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L}_1 \cup \overline{L}_2} = \overline{L}_3$$

  е безконтекстен, което е противоречие.

□

3.3 Алгоритми

3.3.1 Опростяване на безконтекстни граматики

Премахване на безполезните променливи

Нека е дадена безконтекстната граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$. Една променлива A се нарича **полезна**, ако съществува извод от следния вид: [HU79] стр. 88

$$S \to^\star \alpha A \beta \to^\star \gamma,$$

където $\gamma \in \Sigma^\star$, а $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star$. Това означава, че една променлива е полезна, ако участва в извода на някоя дума в езика на граматиката. Една променлива се нарича **безполезна**, ако не е полезна. Целта ни е да получим еквивалентна граматика G' без безполезни променливи. Ще решим задачата като разгледаме две леми.

Лема 7. Нека е дадена безконтекстната граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ и $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$. Съществува алгоритъм, който намира граматика $G' = \langle V', \Sigma, S, R' \rangle$, за която $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$, и за всяка променлива $A' \in V'$, съществува дума $\alpha \in \Sigma^\star$, за която $A' \to^\star \alpha$.

Док. Да разгледаме следната проста итеративна процедура.

Algorithm 1 Намираме $V' = \{A \in V \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[A \to^\star \alpha]\}$

$V' := \emptyset$
$V'' := \{A \in V \mid (\exists \alpha \in \Sigma^\star)[A \to \alpha]\}$
while $V' \neq V''$ **do**
  $V' := V''$
  $V'' := V' \cup \{A \in V \mid (\exists \alpha \in (\Sigma \cup V')^\star)[A \to \alpha]\}$
return V'

Трябва да докажем, че във V' са точно полезните променливи за G. Очевидно е, че ако $A \in V'$, то A е полезна променлива. За другата посока, с индукция по дължината на извода се доказва, че ако $A \to_G^\star \omega$, то $A \in V'$.

✍ Докажете!

Правилата на G' са всички правила на G, в които участват променливи от V' и букви от Σ. $\square$

Лема 8. Съществува алгоритъм, който по дадена безконтекстна граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$, намира $G' = \langle V', \Sigma', S, R'\rangle$, $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$, със свойството, че за всяко $x \in V' \cup \Sigma'$ съществуват $\alpha, \beta \in (V' \cup \Sigma')^\star$, за които $S \to^\star \alpha x \beta$, т.е. всяка променлива или буква в G' е достижима от началната променлива S.

Док. Намираме V' и Σ' итеративно, като в началото $V' = \{S\}$, $\Sigma' = \emptyset$. Ако $A \in V'$ и имаме правила $A \to \alpha_0|\alpha_1|\ldots|\alpha_n$ в G, то за всяко $i = 0, \ldots, n$ добавяме всички променливи на α_i към V' и всички нетерминали на α_i към Σ'. $\square$

Теорема 6. Всеки непразен безконтекстен език L се поражда от безконтекстна граматика G без безполезни правила.

Док. Нека е дадена безконтекстна граматика G пораждаща L. Прилагаме върху G първо процедурата от *Лема 7* и след това върху резултата прилагаме процедурата от *Лема 8*. $\square$

Защо е важен реда на прилагане?

Премахване на ε-правила

За да премахнем правилата от вида $A \to \varepsilon$, следваме процедурата:

Броят на правилата може да се увеличи експоненциално, защото в най-лошия случай извеждаме всички подмножества на дадено множество от променливи

1) Намираме множеството $E = \{A \in V \mid A \to^\star \varepsilon\}$ по следния начин. Първо, $E := \{A \in V \mid A \to \varepsilon\}$. След това, за всяко правило от вида $B \to X_1 \cdots X_k$, ако всяко $X_i \in E$, то добавяме B към E.

2) Строим множеството от правила R', в което няма правила ε-правила по следния начин. За всяко правило $A \to X_1 \cdots X_k$ в R, добавяме към R' всички правила от вида $A \to \alpha_1 \cdots \alpha_k$, където:

   - ако $X_i \notin E$, то $\alpha_i = X_i$;
   - ако $X_i \in E$, то $\alpha_i = X_i$ или $\alpha_i = \varepsilon$;
   - не всички α_i-та са ε.

Пример 18. Нека е дадена граматиката G с правила

$$S \to D, D \to AD|b, A \to AB|BC|a, B \to AA|EC, C \to \varepsilon|CA|a, E \to \varepsilon|aEb.$$

Тогава $E = \{X \in V \mid X \to_G^\star \varepsilon\} = \{A, B, C, E\}$. Това означава, че $\varepsilon \notin \mathcal{L}(G)$. Граматиката G' без ε-правила, за която $\mathcal{L}(G') = \mathcal{L}(G)$ има следните правила $S \to D, D \to AD|D|b, A \to A|B|C|AB|BC|a, B \to A|E|C|AA|EC, C \to C|A|CA|a, E \to aEb|ab$.

Премахване на преименуващи правила

Преименуващите правила са от вида $A \to B$. Нека е дадена граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$, в която има преименуващи правила. Ще построим еквивалентна граматика G' без преименуващи правила. В началото нека в R'

да добавим всички правила от R, които не са преименуващи. След това, за всяка променлива A, за която $A \to_G^\star B$, ако $B \to \alpha$ е правило в R, което не е преименуващо, то добавяме към R' правилото $A \to \alpha$.

Пример 19. Нека е дадена граматиката G с правила

$$A \to B|S, B \to C|BC, C \to AB|a|b, S \to B|CC|b.$$

Първо добавяме към R' правилата $B \to BC, C \to AB|a|b, S \to CC|b$.

- Лесно се съобразява, че $A \to_G^\star B, S, C$. Добавяме правилата $A \to BC|AB|a|b|CC$.
- Имаме $B \to_G^\star C$. Добавяме правилата $B \to AB|a|b$.
- Имаме $S \to_G^\star B, C$. Добавяме правилата $S \to BC|AB|a|b$.

Накрая получаваме, че граматиката G' има правила $A \to BC|AB|a|b|CC, B \to AB|a|b|BC, C \to AB|a|b, S \to BC|AB|CC|a|b$.

3.3.2 Нормална Форма на Чомски

Определение 9. Една безконтекстна граматика е в *нормална форма на Чомски*, ако всяко правило е от вида

$$A \to BC \text{ и } A \to a,$$

като B, C *не могат* да бъдат променливата за начало S. Освен това, позволяваме правилото $S \to \varepsilon$. [1]

Теорема 7. Всеки безконтекстен език L е генериран от контекстно-свободна граматика в нормална форма на Чомски.

Док. Нека имаме контекстно-свободна граматика G, за която $L = L(G)$. Ще построим контекстно-свободна граматика G' в нормална форма на Чомски, $L = L(G')$. Следваме следната процедура:

- Добавяме нов начален символ S_0 и правило $S_0 \to S$.
- Съкращаваме дължината на правилата. Заменяме правилата от вида $A \to u_1 \dots u_n$, $n \geq 3$, $u_i \in V \cup \Sigma$, с правилата   Време $O(n)$

  $$A \to u_1 A_1,\ A_1 \to u_2 A_2,\ \dots,\ A_{n-2} \to u_{n-1} u_n.$$

  където A_i са нови променливи.
- За всяка променлива $A \neq S_0$ премахваме правилата от вида $A \to \varepsilon$. Това правим по следния начин.   Време $O(n^2)$

  Ако имаме правило от вида $R \to Au$ или $R \to uA$, $u \in V \cup \Sigma$, то добавяме правилото $R \to u$. Например,

  - ако имаме правило $R \to aA$, то добавяме правилото $R \to a$;

[1] На стр. 151 в [PL98] дефиницията е малко по-различна. Там дефинират G да бъде в нормална форма на Чомски ако $R \subseteq V \times (V \cup \Sigma)^2$. В този случай губим езиците $\{\varepsilon\}$ и $\{a\}$, за $a \in \Sigma$.

– ако имаме правило $R \to AA$, то добавяме правилото $R \to A$.

Ако имаме правило от вида $R \to A$, то добавяме правилото $R \to \varepsilon$ само ако променливата R още не е преминала през процедурата за премахване на ε.

- Премахваме преименуващите правила, т.е. правила от вида $A \to B$. Заменяме всяко правило от вида $B \to \beta$ с $A \to \beta$, освен ако $A \to \beta$ е вече премахнато преименуващо правило.

  Време $O(n^2)$
  Памет $O(n^2)$

- За правила от вида $A \to u_1u_2$, където $u_1, u_2 \in V \cup \Sigma$, заменяме всяка буква u_i с новата променлива U_i и добавяме правилото $U_i \to u_i$. Например, правилото $A \to aB$ се заменя с правилото $A \to XB$ и добавяме правилото $X \to a$, където X е нова променлива.

  Време $O(n)$

$\square$

Теорема 8. При дадена безконтекстна граматика G с дължина n, можем да намерим еквивалентна на нея граматика G' в нормална форма на Чомски за време $O(n^2)$, като получената граматика е с дължина $O(n^2)$.

Задача 42. Нека е дадена граматиката $G = \langle\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, S, R\rangle$. Използвайте обща конструкция, за да премахнете „дългите” правила (т.е. правила с дължина поне 2, които не са в н.ф. на Чомски) от G като при това получите безконтестна граматика G_1 с език $L(G) = L(G_1)$, където:

а) $R = \{S \to \varepsilon|ab|aAba, A \to aBCb, B \to bbb, C \to aC|aCaC\}\rangle$;

б) $R = \{S \to \varepsilon|ab|baAb, A \to BaBb, B \to b, C \to AbA|aCCa\}$;

в) $R = \{A \to BSB|a, B \to ba|BC, C \to BaSA|a|b, S \to CC|b\}$;

г) $R = \{A \to BAS, B \to CB, C \to ab|ABbS, S \to CC|b\}$;

3.3.3 Проблемът за принадлежност

Теорема 9. Съществува *полиномиален* алгоритъм , който проверява дали дадена дума принадлежни на граматиката G.

За дума α, алгоритъмът работи за време $O(|\alpha|^3)$

Можем да приемем, че $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$ е граматика в нормална форма на Чомски. Нека $\alpha = a_1a_2 \dots a_n$ е дума, за която искаме да проверим дали $\alpha \in L(G)$.

Това е алгоритъм на Cocke, Younger и Kasami (CYK), който е пример за динамично програмиране (стр. 195 от [Koz97])

Algorithm 2 Проверка за $\alpha \in L(G)$

1: $n := |\alpha|$ ▷ Вход дума $\alpha = a_1 \cdots a_n$
2: **for all** $i \in [1, n]$ **do**
3: $\quad V[i,i] = \{A \in V \mid A \to a_i\}$
4: **for all** $i, j \in [1, n]$ & $i \neq j$ **do**
5: $\quad V[i,j] = \emptyset$
6: **for all** $s \in [1, n)$ **do** ▷ Дължина на интервала
7: $\quad$ **for all** $i \in [1, n-s]$ **do** ▷ Начало на интервала
8: $\quad\quad$ **for all** $k \in [i, i+s)$ **do** ▷ Разделяне на интервала
9: $\quad\quad\quad$ **if** $\exists A \to BC \in R$ & $B \in V[i,k]$ & $C \in V[k+1, i+s]$ **then**
10: $\quad\quad\quad\quad V[i, i+s] := V[i, i+s] \cup \{A\}$
11: **if** $S \in V[1, n]$ **then**
12: $\quad$ **return** `True` ▷ Има извод на думата от S
13: **else**
14: $\quad$ **return** `False`

Лема 9. За дадена граматика в нормална форма на Чомски и дума α, за всяко $0 \leq s < |\alpha|$, след s-тата итерация на алгоритъма (редове 6 - 10), за всяка позиция $i = 1, \dots, n-s$,

$$V[i, i+s] = \{A \in V \mid A \to_G^\star a_i \dots a_{i+s}\}.$$

Док. Пълна индукция по s. За $s = 0$ е ясно. (Защо?)

Нека твърдението е вярно за $s < n$. Ще докажем твърдението за $s+1$, т.е. за всяко $i = 1, \dots, n-s-1$,

$$V[i, i+s+1] = \{A \in V \mid A \to_G^\star a_i \dots a_{i+s+1}\}.$$

За едната посока, да разгледаме първото правило в извода $A \to_G^\star a_i \cdots a_{i+s+1}$. Понеже G е в НФЧ, то е от вида $A \to BC$ и тогава съществува някое t, за което $B \to^\star a_i \cdots a_{i+t}$ и $C \to^\star a_{i+t+1} \cdots a_{i+s+1}$. От И.П. получаваме, че $B \in V[i, i+t]$ и $C \in V[i+t+1, i+s+1]$. Тогава от ред 10 на алгоритъма е ясно, че $A \in V[i, i+s+1]$.

За другата посока, нека $A \in V[i, i+s+1]$. Единствената стъпка на алгоритъма, при която може да сме добавили A към множеството $V[i, i+s+1]$ е ред 10. Тогава имаме, че съществува k, за което $B \in V[i,k]$, $C \in V[k+1, i+s+1]$, и $A \to BC$ е правило в граматиката G. От И.П. имаме, че $B \to_G^\star a_i \cdots a_k$ и $C \to_G^\star a_{k+1} \cdots a_{i+s+1}$. Заключаваме веднага, че $A \to_G^\star a_i \cdots a_{i+s+1}$. □

Пример 20. Нека е дадена граматиката G с правила $S \to a|AB|AC, C \to SB|AS, A \to a, B \to b$. Ще приложим CYK алгоритъма за да проверим дали думата $aaabb \in \mathcal{L}(G)$.

- $V[1,1] = V[2,2] = V[3,3] = \{S, A\}$. $V[4,4] = V[5,5] = \{B\}$.
- $V[1,2] = V[2,3] = \{C\}$. $V[3,4] = \{S, C\}$. $V[4,5] = \emptyset$.
- $V[1,3] = \{S\} \cup \emptyset$. $V[2,4] = \{S, C\} \cup \emptyset$. $V[3,5] = \emptyset \cup \{C\}$.
- $V[1,4] = \{S, C\} \cup \emptyset \cup \emptyset = \{S, C\}$. $V[2,5] = \{S\} \cup \emptyset \cup \{C\} = \{S, C\}$

- $V[1,5] = \{S, C\} \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{C\} = \{S, C\}$.

Понеже $S \in V[1,5]$, то $aaabb \in \mathcal{L}(G)$.

Теорема 10. Съществуват алгоритми, които определят по дадена безконтекстна граматика G дали:

[HU79], стр. 137

а) $|\mathcal{L}(G)| = 0$;

б) $|\mathcal{L}(G)| < \infty$;

в) $|\mathcal{L}(G)| = \infty$.

Док. Нека е дадена една безконтекстна граматика G.

($\mathcal{L}(G) = \emptyset$?) Прилагаме алгоритъма за премахване на безполезните променливи. Ако открием, че S е безполезна променлива, то $\mathcal{L}(G) = \emptyset$.

($|\mathcal{L}(G)| < \infty$? или $|\mathcal{L}(G)| = \infty$?) Нека да разгледаме граматиката G' в НФЧ без безполезни променливи, за която $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$. От граматиката $G' = \langle V', \Sigma, S, R' \rangle$ строим граф с възли променливите от V' като за $A, B \in V'$ имаме ребро $A \to B$ точно тогава, когато съществува $C \in V'$, за което $A \to BC$ или $A \to CB$ е правило в R'.

Ако в получения граф имаме цикъл, то $\mathcal{L}(G') = \infty$.

$\square$

3.4 Недетерминирани стекови автомати

На англ. **Push-down automaton**

Определение 10. Недетерминиран стеков автомат е 7-орка от вида

$$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \#, s, \Delta, F \rangle,$$

където:

- Q е крайно множество от състояния;
- Σ е крайна входна азбука;
- Γ е крайна стекова азбука;
- $\# \in \Gamma$ е символ за дъно на стека;
- $s \in Q$ е начално състояние;
- $\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to \mathscr{P}_{fin}(Q \times \Gamma^\star)$ е функция на преходите;
- $F \subseteq Q$ е множество от заключителни състояния.

Озн. $\mathscr{P}_{fin}(A)$ - крайните подмножества на A

Моментно описание (или конфигурация) на изчислението със стеков автомат представлява тройка от вида $(q, \alpha, \gamma) \in Q \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$, т.е. автоматът се намира в състояние q, думата, която остава да се прочете е α, а съдържанието на стека е думата γ. Удобно е да въведем бинарната релация $\vdash_P$

Instanteneous description

над $Q \times \Sigma^\star \times \Gamma^\star$, която ще ни казва как моментното описание на автомата P се променя след изпълнение на една стъпка:

$$(q, x\alpha, Y\gamma) \vdash_P (p, \alpha, \beta\gamma), \text{ ако } \Delta(q, x, Y) \ni (p, \beta),$$

$$(q, \alpha, Y\gamma) \vdash_P (p, \alpha, \beta\gamma), \text{ ако } \Delta(q, \varepsilon, Y) \ni (p, \beta).$$

Рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_P$ ще означаваме с $\vdash_P^\star$. Сега вече можем да дадем дефиниция на език, разпознаван от стеков автомат P.

- $\mathcal{L}_F(P)$ е езика, който се разпознава от P **с финално състояние**,

$$\mathcal{L}_F(P) = \{\omega \mid (q_0, \omega, \#) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \alpha) \ \&\ q \in F\}.$$

- $\mathcal{L}_S(P)$ е езика, който се разпознава от P **с празен стек**,

$$\mathcal{L}_S(P) = \{w \mid (q_0, w, \#) \vdash_P^\star (q, \varepsilon, \varepsilon)\}.$$

Пример 21. За езика $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ съществува стеков автомат P, такъв че $L = \mathcal{L}_S(P)$. Да разгледаме $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \#, s, \Delta, F\rangle$, където

- $Q = \{q\}$;
- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{\#, A\}$;
- $F = \emptyset$;
- $\Delta(q, a, \#) = \{(q, A\#)\}$;
- $\Delta(q, \varepsilon, \#) = \{(q, \varepsilon)\}$;
- $\Delta(q, b, A) = \{(q, \varepsilon)\}$.

Вместо доказателство, да видим как думата a^2b^2 се разпознава от автомата с празен стек:

✍ Докажете, че $L = \mathcal{L}_S(P)$!

$$\begin{aligned}(q, a^2b^2, \#) &\vdash_P (q, ab^2, A\#)\\ &\vdash_P (q, b^2, AA\#)\\ &\vdash_P (q, b, A\#)\\ &\vdash_P (q, \varepsilon, \#)\\ &\vdash_P (q, \varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

Пример 22. За езика $L = \{\omega\omega^R \mid \omega \in \{a, b\}^\star\}$ съществува стеков автомат P, такъв че $L = \mathcal{L}_S(P)$. Нека $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \#, s, \Delta, F\rangle$, където:

- $\Delta(q, a, \#) = \{(q, A\#)\}$;
- $\Delta(q, b, \#) = \{(q, B\#)\}$;
- $\Delta(q, a, A) = \{(q, AA), (p, \varepsilon)\}$;
- $\Delta(q, a, B) = \{(q, AB)\}$;

- $\Delta(q, b, B) = \{(q, BB), (p, \varepsilon)\}$;
- $\Delta(q, b, A) = \{(q, BA)\}$;
- $\Delta(p, a, A) = \{(p, \varepsilon)\}$;
- $\Delta(p, b, B) = \{(p, \varepsilon)\}$;
- $\Delta(q, \varepsilon, \#) = \{(q, \varepsilon)\}$;
- $\Delta(p, \varepsilon, \#) = \{(p, \varepsilon)\}$;

Основното наблюдение, което трябва да направим за да разберем конструкцията на автомата е, че всяка дума от вида $\omega\omega^R$ може да се запише като $\omega_1 aa\omega_1^R$ или $\omega_1 bb\omega_1^R$. Да видим защо P разпознава думата $abaaba$ с празен стек. Започваме по следния начин:

$$\begin{aligned}(q, abaaba, \#) &\vdash_P (q, baaba, A\#)\\ &\vdash_P (q, aaba, BA\#)\\ &\vdash_P (q, aba, ABA\#).\end{aligned}$$

Сега можем да направим два избора как да продължим. Състоянието p служи за маркер, което ни казва, че вече сме започнали да четем ω^R. Поради тази причина, продължаваме така:

$$\begin{aligned}(q, aba, ABA\#) &\vdash_P (p, ba, BA\#)\\ &\vdash_P (p, a, A\#)\\ &\vdash_P (p, \varepsilon, \#)\\ &\vdash_P (p, \varepsilon, \varepsilon).\end{aligned}$$

Да проиграем още един пример. Да видим защо думата aba не се извежда от автомата.

$$\begin{aligned}(q, aba, \#) &\vdash_P (q, ba, A\#)\\ &\vdash_P (q, a, BA\#)\\ &\vdash_P (q, \varepsilon, ABA\#).\end{aligned}$$

От последното моментно описание на автомата нямаме нито един преход, следователно думата aba не се разпознава от P с празен стек.

✍ Докажете, че $\mathcal{L}_S(P) = L$!

Теорема 11. Нека L е произволен език над азбука Σ.

([HU79], стр. 114)

1) Ако съществува НСА P, за който $L = \mathcal{L}_F(P)$, то съществува НСА P', за който $L = \mathcal{L}_S(P')$.

2) Ако съществува НСА P, за който $L = \mathcal{L}_S(P)$, то съществува НСА P', за който $L = \mathcal{L}_F(P')$.

С други думи, езиците разпознавани от НСА с празен стек са точно езиците разпознавани от НСА с финално състояние.

Док.

1) Нека $L = \mathcal{L}_F(P)$, където $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \#, s, \Delta, F\rangle$. Ще построим P', така че да симулира P и като отидем във финално състояние ще изпразним стека. Нека
$$P' = \langle Q \cup \{q_e, s'\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \$, s', \Delta', \emptyset\rangle,$$
където $\$ \notin \Gamma$. Важно е P' да има собствен нов символ за дъно на стека, защото е възможно за някоя дума $\alpha \notin \mathcal{L}_F(P)$ стековият автомат P да си изчисти стека и така да разпознаем повече думи.

- $\Delta'(s', \varepsilon, \$) = \{(s, \#\$)\}$; - започваме симулацията
- $\Delta'(q, a, X)$ включва множеството $\Delta(q, a, X)$, за всяко $q \in Q$, $a \in \Sigma_\varepsilon$, $X \in \Gamma$; - симулираме P
- $\Delta'(q, \varepsilon, X)$ съдържа също и елемента (q_e, ε), за всяко $q \in F$, $X \in \Gamma \cup \{\$\}$; - ако сме във финално, започваме да чистим стека
- $\Delta'(q_e, \varepsilon, X) = \{(q_e, \varepsilon)\}$, за всяко $X \in \Gamma \cup \{\$\}$; - изчистваме стека
- Δ' няма други правила.

2) Сега имаме $L = \mathcal{L}_S(P)$, където $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \#, s, \Delta, \emptyset\rangle$. Да положим
$$P' = \langle Q \cup \{s', q_f\}, \Sigma, \Gamma \cup \{\$\}, \Delta', \$, \{q_f\}\rangle.$$
P' ще симулира P като ще внимаваме кога P изчиства символа $\#$. Тогава ще искаме да отидем във финалното състояние q_f.

- $\Delta'(s', \varepsilon, \$) = \{(s, \#\$)\}$; - започваме симулацията
- $\Delta'(q, a, X) = \Delta(q, a, X)$, за всяко $q \in Q$, $a \in \Sigma_\varepsilon$, $X \in \Gamma$; - симулираме P
- $\Delta'(q, \varepsilon, \$) = \{(q_f, \varepsilon)\}$. - щом сме стигнали до \$, значи P е изчистил стека си

□

Задача 43. Като използвате стековия автомат от Пример 21, дефинирайте автомат P', за който $\mathcal{L}_F(P') = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Теорема 12. Класът на езиците, които се разпознават от краен стеков автомат съвпада с класа на безконтекстните езици.

Док. Ще разгледаме двете посоки на твърдението поотделно. ([HU79], стр. 117)

1) Нека е дадена безконтекстна граматика $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$. Нашата цел е да построим стеков автомат P, така че $\mathcal{L}_S(P) = \mathcal{L}(G)$. Нека
$$P = \langle \{q\}, \Sigma, \Sigma \cup V, S, q, \Delta, \emptyset\rangle,$$
където функцията на преходите е:
$$\Delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, \alpha) \mid A \to \alpha \text{ е правило в граматиката } G\}$$
$$\Delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon)\}$$

2) Нека имаме $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, \#, \emptyset \rangle$. Ще дефинираме безконтекстна граматика G, за която $\mathcal{L}_S(P) = \mathcal{L}(G)$. Променливите на граматика са

$$V = \{[q, A, p] \mid q, p \in Q, A \in \Gamma\}.$$

Правилата на G са следните:

- $S \to [s, \#, q]$, за всяко $q \in Q$;
- $[q, A, q_{m+1}] \to a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \dots [q_m, B_m, q_{m+1}]$, където

$$(q_1, B_1 \dots B_m) \in \Delta(q, a, A)$$

  и произволни $q, q_1, \dots, q_{m+1} \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.
  Да обърнем внимание, че е възможно $m = 0$. Това означава, че $(q_1, \varepsilon) \in \Delta(q, a, A)$ и тогава имаме правилото $[q, A, q_1] \to a$, където $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.

Трябва да докажем, че:

$$[q, A, p] \to_G^\star \alpha \;\Leftrightarrow\; (q, \alpha, A) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

($\Rightarrow$) С пълна индукция по i, ще докажем, че

$$(q, \alpha, A) \vdash_P^i (p, \varepsilon, \varepsilon) \implies [q, A, p] \Rightarrow_G^\star \alpha.$$

Ако $i = 1$, то е лесно, защото $\alpha \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $m = 0$.
Ако $i > 1$, нека $\alpha = a\beta$. Тогава: Възможно е $a = \varepsilon$

$$(q, a\beta, A) \vdash_P (q_1, \beta, B_1 \dots B_n) \vdash_P^{i-1} (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

Да разбием думата β на n части, $\beta = \beta_1 \cdots \beta_n$, със свойството, че след като прочетем β_i сме премахнали променливата B_i от върха на стека. Това означава, че :

$$(q_j, \beta_j, B_j) \vdash_P^{l_j} (q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon), \text{ за } j = 1, \dots, n-1,$$
$$(q_n, \beta_n, B_n) \vdash_P^{l_n} (p, \varepsilon, \varepsilon),$$

където $l_1 + l_2 + \dots + l_n = i - 1$. Сега по **И.П.** получаваме:

$$(q_j, \beta_j, B_j) \vdash_P^{l_j} (q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon) \implies [q_j, B_j, q_{j+1}] \to_G^\star \beta_j, \text{ за } j = 1, \dots, n-1,$$
$$(q_n, \beta_n, B_n) \vdash_P^{l_n} (p, \varepsilon, \varepsilon) \implies [q_n, B_n, p] \to_G^\star \beta_n.$$

Обединявайки тези изводи с правилото

$$[q, A, p] \to_G a[q_1, B_1, q_2] \dots [q_n, B_n, p],$$

получаваме извода

$$[q, A, p] \to_G^\star a\beta.$$

($\Leftarrow$) Отново с пълна индукция по i ще докажем, че

$$[q, A, p] \to_G^i \alpha \implies (q, \alpha, A) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, \varepsilon).$$

Ако $i = 1$, то имаме $[q, A, p] \to \alpha$, където $\alpha = a$ или $\alpha = \varepsilon$. Ако $i > 1$, то имаме, че $\alpha = a\beta$ и за някое n,

$$[q, A, p] \to_G a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \dots [q_n, B_n, p] \to_G^{i-1} \beta.$$

Отново нека $\beta = \beta_1 \dots \beta_n$, където

$$\begin{aligned} &[q_j, B_j, q_{j+1}] \to_G^{i_j} \beta_j, \text{ за } j = 1, \dots, n-1, \\ &[q_n, B_n, p] \to_G^{i_n} \beta_n, \end{aligned}$$

където $i_1 + i_2 + \dots + i_n = i - 1$. От **И.П.** получаваме, че

$$\begin{aligned} &[q_j, B_j, q_{j+1}] \to_G^{i_j} \beta_j \implies (q_j, \beta_j, B_j) \vdash_P^\star (q_{j+1}, \varepsilon, \varepsilon), \ j = 1, \dots, n-1 \\ &[q_n, B_n, p] \to_G^{i_n} \beta_n \implies (q_n, \beta_n, B_n) \vdash_P^\star (p, \varepsilon, \varepsilon), \end{aligned}$$

Обединявайки всичко, което знаем, получаваме:

$$\begin{aligned} (q, a\beta, A) &\vdash_P (q_1, \beta_1 \cdots \beta_n, B_1 \cdots B_n) \\ &\vdash_P^\star (q_2, \beta_2 \cdots \beta_n, B_2 \cdots B_n) \\ &\dots \\ &\vdash_P^\star (q_n, \beta_n, B_n) \\ &\vdash_P^\star (p, \varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

$\square$

Пример 23. Нека е дадена граматиката G с правила $S \to ASB|\varepsilon, A \to aAa|a, B \to bBb|b$. Ще построим стеков автомат $P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \#, s, \Delta, F \rangle$, такъв че $\mathcal{L}_S(P) = \mathcal{L}(G)$.

- $\Sigma = \{a, b\}$;
- $\Gamma = \{A, S, B, a, b\}$;
- $\# = S$;
- $Q = \{q\}$;
- $F = \emptyset$;
- Дефинираме релацията на преходите, следвайки конструкцията от *Теорема 12*:
  - $\Delta(q, \varepsilon, S) = \{\langle q, ASB \rangle, \langle q, \varepsilon \rangle\}$;
  - $\Delta(q, \varepsilon, A) = \{\langle q, aAa \rangle, \langle q, a \rangle\}$;
  - $\Delta(q, \varepsilon, B) = \{\langle q, bBb \rangle, \langle q, b \rangle\}$;
  - $\Delta(q, a, a) = \{\langle q, \varepsilon \rangle\}$;
  - $\Delta(q, b, b) = \{\langle q, \varepsilon \rangle\}$.

Теорема 13. Нека L е безконтекстен език и R е регулярен език. Тогава тяхното сечение $L \cap R$ е безконтекстен език. (стр. 144 от [PL98])

Док. Нека имаме стеков автомат

$$\mathcal{M}_1 = \langle Q_1, \Sigma, \Gamma, \#, s_1, \Delta_1, F_1 \rangle, \text{ където } \mathcal{L}_F(\mathcal{M}_1) = L,$$

и краен детерминиран автомат

всъщност няма нужда да е детерминиран

$$\mathcal{M}_2 = \langle Q_2, \Sigma, s_2, \delta_2, F_2 \rangle, \text{ където } \mathcal{L}(\mathcal{M}_2) = R.$$

Ще определим нов стеков автомат $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \#, s, \Delta, F \rangle$, където

- $Q = Q_1 \times Q_2$;
- $s = \langle s_1, s_2 \rangle$;
- $F = F_1 \times F_2$;
- Функцията на преходите Δ е дефинирана както следва:
  - Ако $\Delta_1(q_1, a, b) \ni \langle r_1, c \rangle$ и $\delta_2(q_2, a) = r_2$, то

    симулираме едновременно изчислението и на двата автомата

    $$\Delta(\langle q_1, q_2 \rangle, a, b) \ni \langle \langle r_1, r_2 \rangle, c \rangle.$$

  - Ако $\Delta_1(q_1, \varepsilon, b) \ni \langle r_1, c \rangle$, то за всяко $q_2 \in Q_2$,

    празен ход на автомата M_2

    $$\Delta(\langle q_1, q_2 \rangle, \varepsilon, b) \ni \langle \langle r_1, q_2 \rangle, c \rangle.$$

  - Δ не съдържа други преходи;

    ✍ Докажете, че $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$!

□

Пример 24. Езикът $L = \{w \in \{a, b, c\}^\star \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$ не е безконтекстен.

Док. Да допуснем, че L е безконтекстен език. Тогава

$$L' = L \cap \mathcal{L}(a^\star b^\star c^\star)$$

също е безконтекстен език. Но $L' = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, за който знаем от Пример 16, че *не* е безконтекстен. Достигнахме до противоречие. Следователно, L не е безконтекстни език. □

Библиография

Основни източници в тази глава са:

- глава 4 от [HU79], глави 5, 6 и 7 от [HMU01];
- глава 2 от [Sip97];
- глава 3 от [PL98].

3.5 Допълнителни задачи

Задача 44. Проверете дали следните езици са безконтекстни:

а) $\{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

б) $\{a^n b^{2n} c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

в) $\{a^m b^n \mid m \neq n\}$;

г) $\{a^n b^m c^k \mid n < m < k\}$;

д) $\{a^n b^m c^k \mid k = \min\{n, m\}\}$;

е) $\{a^n b^n c^m \mid m \leq n\}$;

ж) $\{a^n b^m c^k \mid k = n \cdot m\}$;

з) $L^\star$, където $L = \{\alpha\alpha^R \mid \alpha \in \{a, b\}^\star\}$;

и) $\{www \mid w \in \{a, b\}^\star\}$;

к) $\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^\star\}$;

л) $\{a^{n^2} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

м) $\{a^p \mid p$ е просто $\}$;

н) $\{\omega \in \{a, b\}^\star \mid \omega = \omega^R\}$;

о) $\{\omega^n \mid \omega \in \{a, b\}^\star \ \& \ n \in \mathbb{N}\}$;

п) $\{a^{n^3+2n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

р) $L = \{wcx \mid w, x \in \{a, b\}^\star \ \& \ w$ е подниз на $x\}$;

с) $L = \{x_1 c x_2 c \dots c x_k \mid k \geq 2 \ \& \ x_i \in \{a, b\}^\star \ \& \ (\exists i, j)[i \neq j \ \& \ x_i = x_j]\}$;

т) $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 0 \ \& \ (i = j \vee j = k)\}$;

у) $L = \{\alpha \in \{a, b, c\}^\star \mid n_a(\alpha) > n_b(\alpha) > n_c(\alpha)\}$;

ф) $L = \{a, b\}^\star \setminus \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$;

х) $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid n_a(\omega) = 2n_b(\omega)\}$;

ц) $L = \{a^n b^m c^m a^n \mid m, n \in \mathbb{N} \ \& \ n = m + 42\}$;

ч) $L = \{babaabaaab \cdots ba^{n-1}ba^n b \mid n \geq 1\}$;

ш) $\{a^m b^n c^k \mid m = n \vee n = k \vee m = k\}$;

щ) $\{a^m b^n c^k \mid m \neq n \vee n \neq k \vee m \neq k\}$;

ю) $\{a^m b^n c^k \mid m = n \wedge n = k \wedge m = k\}$;

я) $\{w \in \{a, b, c\}^\star \mid n_a(w) \neq n_b(w) \vee n_a(w) \neq n_c(w) \vee n_b(w) \neq n_c(w)\}$.

Задача 45. Докажете, че ако L е безконтекстен език, то $L^R = \{\omega^R \mid \omega \in L\}$ също е безконтекстен.

Задача 46. Нека $\Sigma = \{a, b, c, d, f, e\}$. Докажете, че езикът L е безконтекстен, където за думите $\omega \in L$ са изпълнени свойствата: от Владислав

- за всяко $n \in \mathbb{N}$, след всяко срещане на n последноватeлни a-та следват n последователни b-та, и b-та не се срещат по друг повод в ω, и

- за всяко $m \in \mathbb{N}$, след всяко срещане на m последноватeлни c-та следват m последователни d-та, и d-та не се срещат по друг повод в ω, и

- за всяко $k \in \mathbb{N}$, след всяко срещане на k последноватeлни f-а следват k последователни e-та, и e-та не се срещат по друг повод в ω.

Задача 47. Да разгледаме езиците: от Владислав

$$P = \{\alpha \in \{a, b, c\}^* \mid \alpha \text{ е палиндром с четна дължина}\}$$
$$L = \{\beta b^n \mid n \in \mathbb{N}, \beta \in P^n\}.$$

Да се докаже, че:

а) L не е регулярен;

б) L е безконтекстен.

Задача 48. Нека L_1 е произволен регулярен език над азбуката Σ, а L_2 е езика от всички думи палиндроми над Σ. Докажете, че L е безконтекстен език, където: от Владислав

$$L = \{\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_{3n}\beta_1 \cdots \beta_m\gamma_1 \cdots \gamma_n \mid \alpha_i, \gamma_j \in L_1, \beta_k \in L_2, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

Задача 49. Нека $L = \{\omega \in \{a, b\}^\star \mid N_a(\omega) = 2\}$. Да се докаже, че езикът $L' = \{\alpha^n \mid \alpha \in L, n \geq 0\}$ не е безконтекстен. от Владислав

Задача 50. Нека $\Sigma = \{a, b, c\}$ и $L \subseteq \Sigma^\star$ е безконтестен език. Ако имаме дума $\alpha \in \Sigma^\star$, тогава *L-вариант* на α ще наричаме думата, която се получава като в α всяко едно срещане на символа a заменим с (евентуално различна) дума от L. Тогава, ако $M \subseteq \Sigma^*$ е произволен безконтестен език, да се докаже че езикът от Владислав

$$M' = \{\beta \in \Sigma^\star \mid \beta \text{ е } L\text{-вариант на } \alpha \in M\}$$

също е безконтекстен.

Задача 51. Докажете, че всеки безконтекстен език над азбуката $\Sigma = \{a\}$ е регулярен.

Задача 52. Да фиксираме азбуката Σ. Нека L е безконтекстен език, а R е регулярен език. Докажете, че езика $L/R = \{\omega \in \Sigma^\star \mid (\exists u \in R)[\omega u \in L]\}$ е безконтекстен.

Задача 53. Нека е дадена граматиката $G = \langle\{a, b\}, \{S, A, B, C\}, S, R\rangle$. Използвайте CYK-алгоритъма, за да проверите дали думата α принадлежи на $L(G)$, където правилата на граматиката R и думата α са зададени като:

а) $R = \{S \to BA|CA|a, C \to BS|SA, A \to a, B \to b\}$, $\alpha = bbaaa$;

б) $R = \{S \to AB|BC, A \to BA|a, B \to CC|b, C \to AB|a\}$, $\alpha = baaba$;

в) $R = \{S \to AB, A \to AC|a|b, B \to CB|a, C \to a\}$, $\alpha = babaa$;

Глава 4

Машини на Тюринг

4.1 Основни понятия

Машина на Тюринг ще наричаме седморка от вида $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \sqcup, F \rangle$, където:

Sipser дава малко по-различна дефиниция - с едно финално приемащо и едно финално отхвърлящо.

- Q - състояния;
- Σ - азбука за входа;
- Γ - азбука за лентата, $\Sigma \subseteq \Gamma$;
- $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$ - (частична) функция на преходите;
- s - начално състояние, $s \in Q$;
- $\sqcup$ - празен символ, $\sqcup \in \Gamma \setminus \Sigma$;
- F - финални състояния, $F \subseteq Q$.

Сега ще опишем как $\mathcal{M}$ работи върху вход думата $\alpha \in \Sigma^\star$. Първоначално, безкрайната лента съдържа само α. Останалите клетки на лентата съдържат $\sqcup$. Освен това, $\mathcal{M}$ се намира в началното състояние s и главата е върху най-левия символ на α. Работата $\mathcal{M}$ е описана от функцията на преходите.

Моментното описание (или конфигурацията) на едно изчисление на МТ е тройка от вида $(\alpha, q, \beta) \in \Gamma^\star \times Q \times \Gamma^\star$. Това означава, че машината се намира в състояние q и лентата има вида

(На англ. instanteneous description)

$$\ldots \sqcup \sqcup \sqcup \alpha\beta \sqcup \sqcup \sqcup \ldots,$$

като главата на мишната е поставена върху първия символ на β.

Както за автомати, удобно е да дефинираме бинарна релация $\vdash_{\mathcal{M}}$, която ще казва как моментното описание на машината $\mathcal{M}$ се променя при изпълнение на една стъпка от изчислението.

- Ако $\delta_{\mathcal{M}}(q, Z) = (p, Y, R)$, то $(\alpha, q, Z\beta) \vdash_{\mathcal{M}} (\alpha Y, p, \beta)$. При $Z = \sqcup$, също така можем да запишем $(\alpha, q, \varepsilon) \vdash_{\mathcal{M}} (\alpha Y, p, \varepsilon)$

- Ако $\delta_{\mathcal{M}}(q, Z) = (p, Y, L)$, то $(\alpha X, q, Z\beta) \vdash_{\mathcal{M}} (\alpha, p, XY\beta)$. При $X = \sqcup$, имаме $(\varepsilon, q, Z\beta) \vdash_{\mathcal{M}} (\varepsilon, p, \sqcup Y\beta)$.
- Ако $\delta_{\mathcal{M}}(q, Z) = (p, Y, N)$, то ....

С $\vdash^{\star}_{\mathcal{M}}$ ще означаваме рефлексивното и транзитивно затваряне на $\vdash_{\mathcal{M}}$.

Езикът, който се **разпознава чрез финални състояния** от машината M е:

$$\mathcal{L}_F(\mathcal{M}) = \{\alpha \in \Sigma^{\star} \mid (\varepsilon, s, \alpha) \vdash^{\star} (\beta, q, \gamma) \ \& \ q \in F \ \& \ \beta, \gamma \in \Gamma^{\star}\}.$$

Езикът, който се **разпознава чрез спиране** от M е:

Това трябва ли ми ?

$$\mathcal{L}_H(\mathcal{M}) = \{\alpha \in \Sigma^{\star} \mid (\varepsilon, s, \alpha) \vdash^{\star} (\beta, q, X\gamma) \ \& \ \neg!\delta(q, X)\}$$

Може да се докаже, че се разпознават едни и същи езици.

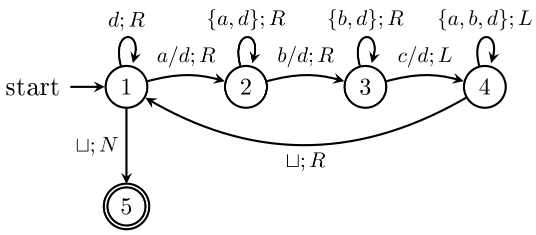
Езиците, които се разпознават от МТ се наричат **полуразрешими езици**. Един език L се нарича разрешим, ако за него съществува $\mathcal{M}$, $L = \mathcal{L}_F(\mathcal{M})$ и освен това $\mathcal{M}$ завършва върху всички входни думи.

4.2 Примери

Полуразрешим език, който не е безконтекстен

Пример 25. Да разгледаме езика $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Ще построим машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.

Знаем, че L не е безконтекстен



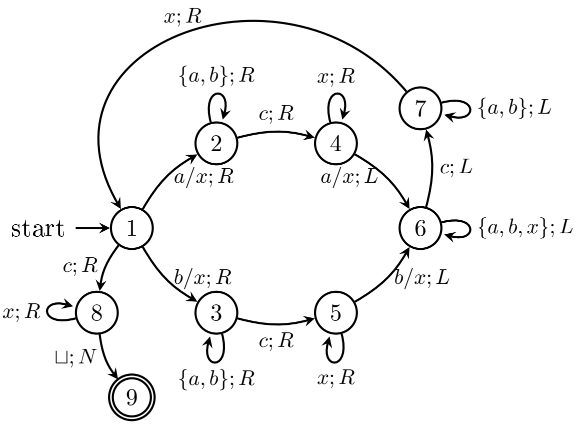
Да проследим изчислението на думата $aabbcc$:

$${}_1aabbcc \vdash d_2abbcc \vdash da_2bbcc \vdash dad_3bcc \vdash dadb_3cc \vdash dad_4bdc \vdash da_4dbdc \vdash \cdots \vdash$$

$${}_4dadbdc \vdash {}_4\sqcup dadbdc \vdash {}_1dadbdc \vdash d_1adbdc \vdash dd_2dbdc \vdash ddd_2bdc \vdash dddd_3dc \vdash$$

$$ddddd_3c \vdash dddddd_4 \vdash \cdots \vdash {}_4\sqcup dddddd \vdash {}_1dddddd \vdash \cdots \vdash dddddd_1\sqcup \vdash dddddd_5\sqcup.$$

Пример 26. Да разгледаме езика $L = \{\omega c \omega \mid \omega \in \{a, b\}^{\star}\}$. Ще построим машина на Тюринг $\mathcal{M}$, за която $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$.



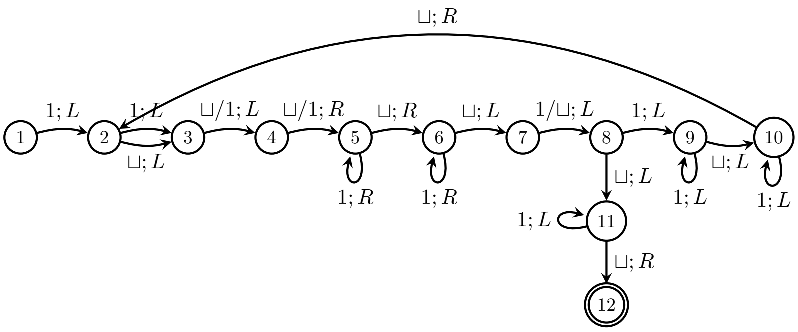
Да проследим изчислението на думата *abcab*.

Удвояване на броя на единиците

$$\overset{1}{1}\,11 \Rightarrow \overset{2}{\sqcup}\,111 \Rightarrow \overset{3}{\sqcup}\sqcup 111 \Rightarrow \overset{4}{\sqcup}\,1\sqcup 111 \Rightarrow 1\,\overset{5}{1}\sqcup 111 \Rightarrow 11\,\overset{5}{\sqcup}\,111 \Rightarrow 11\sqcup\overset{6}{1}\,11$$

$$\cdots \Rightarrow 11\sqcup 111\,\overset{6}{\sqcup} \Rightarrow 11\sqcup 11\,\overset{7}{1}\sqcup \Rightarrow 11\sqcup 1\,\overset{8}{1}\sqcup\sqcup \Rightarrow 11\sqcup\overset{9}{1}\,1\sqcup\sqcup \Rightarrow 1\,\overset{10}{1}\sqcup 11\sqcup\sqcup$$

$$\cdots \Rightarrow \overset{10}{\sqcup}\,11\sqcup 11\sqcup\sqcup \Rightarrow \overset{2}{1}\,1\sqcup 11\sqcup\sqcup \Rightarrow \cdots$$



Задача 54. За произволно естествено число n, дефинирайте МТ $\mathcal{M}_n$ с $n+11$ състояние, за която, ако главата е на най-лявата 1-ца върху блок от 1-ци, то $\mathcal{M}_n$ завършва като записва $2n$ единици на лентата и завършва в стандартна конфигурация.

Канонична подредба на $\Sigma^\star$

Нека $\Sigma = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$. Подреждаме думите по ред на тяхната дължина. Думите с еднаква дължина подреждаме по техния числов ред, т.е.

гледаме на буквите a_i като числото i в k-ична бройна система. Тогава думите с дължина n са числата от 0 до $k^n - 1$ записани в k-ична бройна система. Ще означаваме с ω_i i-тата дума в $\Sigma^\star$ при тази подредба.

Пример 27. Ако $\Sigma = \{0, 1\}$, то наредбата започва така:

$$\varepsilon, 0, 1, \underbrace{00, 01, 10, 11}_{\text{от 0 до 3}}, \underbrace{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}_{\text{от 0 до 7}}, 0000, 0001, \ldots$$

В този случай, $\omega_0 = \varepsilon$, $\omega_7 = 000$, $\omega_{13} = 110$.

Многолентови машини на Тюринг

Това е просто като имаш shift. Използват се при недет. машини

Машина на Тюринг с k ленти има същата дефиниция като еднолентова МТ с единствената разлика, че

$$\delta : Q^k \times \Gamma^k \to Q^k \times \Gamma^k \times \{L, R\}^k.$$

Твърдение 10. За всяка k-лентова МТ $\mathcal{M}$ съществува еднолентова МТ $\mathcal{M}'$, такава че $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(\mathcal{M}')$.

Док. $\Gamma' = \{\sharp\} \cup \Gamma \cup \{\hat{X} \mid X \in \Gamma\}$. □

Недетерминистични машини на Тюринг

Теорема 14. Ако L се разпознава от НМТ $\mathcal{N}$, до L също се разпознава и от ДМТ $\mathcal{D}$.

Док. Понеже функцията $\Delta_{\mathcal{D}}$ е крайна, нека с r да означим максималния брой избори за следваща стъпка в произволно изчисление на $\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ има три ленти.

- На първата лента съхраняваме входящия низ и тя никога не се променя.
- На втората лента помним мястото на $\mathcal{D}$ в дървото на недетерминистичните изчисления на $\mathcal{N}$.
- На третата лента съхраняваме лентата на $\mathcal{N}$ за детерминистичното изчисление на $\mathcal{N}$, определено от втората лента. Например, ако съдържанието на втората лента е $3, 1, 2$, това означава, че симулираме изчисление от три стъпки като на първата стъпка избираме третия клон, на втората стъпка избираме първия клон, на третата стъпка избираме втория клон.

□

Полуразрешими и разрешими езици

Теорема 15. Ако L и $\Sigma^\star \setminus L$ са полуразрешими езици, то L е разрешим език.

Busy Beaver

Тук разглеждаме азбука $\Sigma = \{1, \sqcup\}$. [Rad62]

Тезис на Чърч-Тюринг

4.3 Универсална машина на Тюринг

За простота, нека $\Sigma = \{0, 1\}$ и $\Gamma = \{0, 1, \sqcup\}$.

- $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = \sqcup$;
- $D_1 = L$, $D_2 = R$

Кодиране на преход

Да разгледаме прехода $\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$. Кодираме този преход по следния начин:

$$0^i 1 0^j 1 0^k 1 0^l 1 0^m$$

Да обърнем внимание, че в този двоичен код няма последователни единици и той започва и завършва с нула.

Кодиране на машина на Тюринг

За да кодираме една машина на Тюринг $\mathcal{M}$ е достатъчно да кодираме функцията на преходите δ. Понеже δ е крайна функция, нека с числото r да означим броя на всички възможни преходи. По описания по-горе начин, нека $code_i$ е числото в двоичен запис, получено за i-тия преход на δ. Тогава кодът на $\mathcal{M}$ е следното число в двоичен запис:

$$\langle \mathcal{M} \rangle = 111\ code_1\ 11\ code_2\ 11\ \cdots\ 11\ code_r\ 111.$$

- Лесно се съобразява, че за две МТ $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ с различни функции на преходите, имаме $\langle \mathcal{M} \rangle \neq \langle \mathcal{M}' \rangle$.
- Ще казваме, че числото r е **код на** $\mathcal{M}$, ако числото r, записано в двоичен запис представлява думата $\langle \mathcal{M} \rangle$. Оттук нататък, когато пишем $\mathcal{M}_r$, ще имаме предвид машината на Тюринг с код r.
- С $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ ще означаваме кода на МТ $\mathcal{M}$ при вход w е числото с двоичен запис описанието на $\mathcal{M}$ и след това прикрепена думата w. При едно число $r = \langle M, w \rangle$, лесно се намира кода на $\mathcal{M}$. Просто започваме да четем двоичния запис на r докато не срещнем за втори път 111. След това започва думата w.

4.4 Изчислими функции

Нека е дадена функцията $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Ще казваме, че f е изчислима с машината на Тюринг $\mathcal{M}$, ако за всяко $n_1, \ldots, n_k$ е изпълнено:

- Представяме всяко от числата $n_1, \ldots, n_k$ в монадична бройна система като лентата на $\mathcal{M}$ има вида:

$$\ldots \sqcup \sqcup \underbrace{1111\ldots 11}_{n} \sqcup \sqcup \ldots,$$

като изискваме главата на $\mathcal{M}$ да е позиционирана върху най-лявата единица. Такава конфигурация ще наричаме **стандартна начална конфигурация**.

- Ако $f(n_1, \ldots, n_k) = m$, то $\mathcal{M}$ завършва с резултат върху лентата

$$\ldots \sqcup \sqcup \underbrace{1111\ldots 11}_{m} \sqcup \sqcup \ldots,$$

като главата на $\mathcal{M}$ е върху най-лявата 1-ца. Такава конфигурация се нарича **стандартна финална конфигурация**.

- Ако $f(n_1, \ldots, n_k)$ е недефенирана, то $\mathcal{M}$ няма да завърши в стандартна конфигурация, т.е. или $\mathcal{M}$ ще работи безкрайно време, или ще завърши в конфигурация, която не е стандартна.

Теорема 16. За всяко k, съществуват функции от вида $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, които не са изчислими с МТ.

Док. Знаем, че всяка МТ може да се кодира с естествено число. Това означава, че съществуват изброимо безкрайно много различни машини на Тюринг. Също така, ние знаем, че съществуват неизброимо много различни функции от вида $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$. Заключаваме, че със сигурност съществуват функции, които не са изчислими с МТ. $\square$

4.5 Разрешими и полуразрешими езици

Полуразрешими са тези езици, които се разпознават от машина на Тюринг.

Разрешими са тези езици, които се разпознават от машина на Тюринг, която спира върху всеки вход.

4.5.1 Диагоналният език L_d

Нека $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ е каноничната подредба на всички думи над азбуката $\{0, 1\}$. Да разгледаме безкрайната таблица $\{a_{ij} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$, където:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega_i \in L(\mathcal{M}_j), \\ 0, & \text{ако } \omega_i \notin L(\mathcal{M}_j). \end{cases}$$

Идеята е да вземем 0-ите по диагонала на тази таблица.

Езикът $L_d = \{w_i \mid w_i \notin L(\mathcal{M}_i)\}$ не се разпознава от МТ, т.е. L_d **не** е полуразрешим.

Да допуснем, че L_d се разпознава от МТ, т.е. $L_d = \mathcal{L}(\mathcal{M}_i)$, за някоя МТ с код i. Тогава:

$$\omega_i \in L_d \implies \omega_i \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_i) \implies \omega_i \notin L_d,$$
$$\omega_i \notin L_d \implies \omega_i \notin \mathcal{L}(\mathcal{M}_i) \implies \omega_i \in L_d.$$

Достигаме до противоречие.

Забележка. Да обърнем внимание, че $\bar{L}_d = \{\omega_i \mid \omega_i \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_i)\}$ е полуразрешим език.

4.5.2 Универсалният език L_u

Да разгледаме езика $L_u = \{\langle \mathcal{M}, \omega \rangle \mid \omega \in \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$.

Лема 10. L_u е полуразрешим език.

Лема 11. $\bar{L}_u = \{\langle \mathcal{M}, \omega \rangle \mid \omega \notin \mathcal{L}(\mathcal{M})\}$ **не** е полуразрешим език.

Теорема 17. Универсалният език L_u е полуразрешим, но **не** е разрешим.

Да допуснем, че L_u е разрешим.

- Вход думата ω;
- Намираме каноничния индекс i на ω, т.е. $\omega_i = \omega$;
- Намираме машината на Тюринг $\mathcal{M}_i$, чиито код е i;
- Симулираме $\langle \mathcal{M}_i, \omega_i \rangle$ върху $\mathcal{M}$.

Така получваме, че:

$$\omega_i \in \bar{L}_d \;\leftrightarrow\; \mathcal{M}_i \text{ приема } \omega_i \;\leftrightarrow\; \langle \mathcal{M}_i, \omega_i \rangle \in L_u.$$

Заключаваме, че $\bar{L}_d$ е разрешим език, което е противоречие.

4.6 Теорема на Райс-Успенски

[HU79], стр. 188

Нека $\mathscr{S}$ е множество от полуразрешими езици над азбуката $\{0,1\}$. Ще казваме, че $\mathscr{S}$ е свойство на полуразрешимите езици. $\mathscr{S}$ е тривиално свойство, ако $\mathscr{S} = \emptyset$ или $\mathscr{S}$ съдържа точно всички полуразрешими езици. Нека $L_{\mathscr{S}} = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) \in \mathscr{S}\}$.

Теорема 18. Всяко нетривиално свойство $\mathscr{S}$ на полуразрешимите езици е неразрешимо.

Док. Без ограничение на общността, нека $\emptyset \notin \mathscr{S}$. Понеже $\mathscr{S}$ е нетривиално свойство, да разгледаме $L \in \mathscr{S}$, като $\mathcal{M}_L$ е машина на Тюринг, за която $\mathcal{L}(\mathcal{M}_L) = L$. Да разгледаме алгоритъм A, който за дадена дума $\langle \mathcal{M}, w \rangle$ връща код на машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, за която:

Цел: да сведем L_u към $\mathscr{S}$

- имаме вход - произволна дума x;
- първоначално не обръщаме внимание на x, а питаме дали $\langle \mathcal{M}, w\rangle \in L_u$, т.е. дали $\mathcal{M}$ приема думата w;
  - ако съществува стъпка s, за която $\langle \mathcal{M}, w\rangle \in L_u^s$, то симулираме $\mathcal{M}_L$ върху входната дума x; в този случай получаваме $\mathcal{L}(\mathcal{M}') = L$;
  - ако не съществува стъпка s, за която $\langle \mathcal{M}, w\rangle \in L_u^s$, то няма да разпознаем нито една дума; в този случай получаваме $\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset$.

От всичко това следва, че:

$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \in L_u \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = L \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') \in \mathscr{S},$$
$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \notin L_u \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') = \emptyset \implies \mathcal{L}(\mathcal{M}') \notin \mathscr{S}.$$

Да допуснем, че $\mathscr{S}$ е разрешимо множество от полуразрешими езици. Тогава от еквивалентността,

$$\langle \mathcal{M}, w\rangle \in L_u \leftrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}') \in \mathscr{S},$$

получаваме, че $\mathcal{L}_u$ е разрешимо множество, което е противоречие. □

Следствие 8. Следните свойства $\mathscr{S}$ на полуразрешимите множества **не** са разрешими:

а) празнота, т.е. $\mathscr{S} = \{\langle \mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \emptyset\}$;

б) крайност, т.е. $\mathscr{S} = \{\langle \mathcal{M}\rangle \mid |\mathcal{L}(\mathcal{M})| < \infty\}$;

в) регулярност, т.е. $\mathscr{S} = \{\langle \mathcal{M}\rangle \mid (\exists \text{ рег. израз } r)[\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(r)]\}$;

г) безконтекстност, т.е. $\mathscr{S} = \{\langle \mathcal{M}\rangle \mid (\exists \text{ безконт. грам. } G)[\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \mathcal{L}(G)]\}$.

4.7 Валидни и невалидни изчисления на машини на Тюринг

[HU79], стр. 201

Лема 12. Множеството от валидни изчисления на машина на Тюринг $\mathcal{M}$ е сечението на два безконтекстни езика L_1 и L_2. Освен това, граматиките на L_1 и L_2 могат ефективно да бъдат построени от $\mathcal{M}$.

Упътване. Да разгледаме езика

$$L_3 = \{\alpha\#\beta^R \mid \alpha \vdash_{\mathcal{M}} \beta\}.$$

Лесно е да построим стеков автомат P_3, който разпознава езика L_3. Четем буквата X. Тогава:

- ако $\delta_{\mathcal{M}}(q, X) = (p, Y, R)$, то слагаме Yp на върха на стека;
- ако $\delta_{\mathcal{M}}(q, X) = (p, Y, L)$, то ако Z е върха на стека, заменяме Z с pZY;

Аналогично разглеждаме безконтекстния език

$$L_4 = \{\alpha^R\#\beta \mid \alpha \vdash_{\mathcal{M}} \beta\}.$$

Сега можем да дефинираме езиците

$$L_1 = (L_3\#)^\star(\{\varepsilon\} \cup \Gamma^\star F \Gamma^\star \#)$$
$$L_2 = q_0\Sigma^\star(L_4\#)^\star(\{\varepsilon\} \cup \Gamma^\star F \Gamma^\star \#),$$

за които е ясно, че са безконтекстни. $\square$

Теорема 19. Въпросът дали две произволни безконтекстни граматики G_1 и G_2, $\mathcal{L}(G_1) \cap \mathcal{L}(G_2) = \emptyset$, е неразрешим.

Лема 13. Множеството от невалидни изчисления на машина на Тюринг е безконтекстен език.

Теорема 20. Въпросът дали за произволна безконтекстна граматика G, $\mathcal{L}(G) = \Sigma^\star$, е неразрешим.

Следствие 9. Нека G_1 и G_2 са произволни безконтекстни граматики, а r е произволен регулярен израз. Следните проблеми са неразрешими:

1. $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$;
2. $\mathcal{L}(G_2) \subseteq \mathcal{L}(G_1)$;
3. $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(r)$;
4. $\mathcal{L}(r) \subseteq \mathcal{L}(G_1)$.

Критерии за полуразрешимост

Лема 14. Нека $\mathscr{S}$ е свойство на полуразрешимите езици. Ако съществува безкраен език $L_0 \in \mathscr{S}$, който няма крайно подмножество в $\mathscr{S}$, то $L_{\mathscr{S}}$ не е полуразрешим език.

Упътване. Нека $L_0 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_0)$. Ще опишем алгоритъм, който при вход дума $\langle \mathcal{M}, \omega \rangle$, извежда код на машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, която работи така:

- вход думата α;
- за $|\alpha|$ стъпки симулираме $\mathcal{M}$ върху ω.
  - ако $\mathcal{M}$ приема ω за $\leq |x|$ стъпки, то симулираме $\mathcal{M}_0$ върху α;
  - ако $\mathcal{M}$ не приема ω за $\leq |x|$ стъпки, то зацикляме и нищо не връщаме.

Така получаваме, че

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \begin{cases} \{\alpha \in L_0 \mid |\alpha| < k\}, & \mathcal{M} \text{ приема } \omega \\ L, & \mathcal{M} \text{ не приема } \omega, \end{cases}$$

където k е минималната стъпка, при която $\mathcal{M}$ приема ω.

Заключаваме, че

$$\langle \mathcal{M}, \omega \rangle \notin L_u \ \leftrightarrow \ \mathcal{L}(\mathcal{M}') \in \mathscr{S}.$$

Това означава, че ефективно можем да сведем въпрос за принадлежност в $\bar{L}_u$ към въпрос за принадлежност в $L_{\mathscr{S}}$. Следователно, ако $L_{\mathscr{S}}$ е полуразрешим език, то $\bar{L}_u$ е полуразрешим език, което е противоречие. $\square$

Следствие 10. Следните езици **не** са полуразрешими:

- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid |\mathcal{L}(\mathcal{M})| = \infty\}$;
- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M}) = \Sigma^\star\}$;
- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ не е разрешим$\}$;
- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ не е полуразрешим$\}$;
- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ не е регулярен$\}$.

Лема 15. Нека L_1 е език в $\mathscr{S}$ и нека L_2 е полуразрешимо множество, разширяващо L_1, и $L_2 \notin \mathscr{S}$. Тогава $L_{\mathscr{S}}$ не е полуразрешимо.

Упътване. Нека $L_1 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_1)$ и $L_2 = \mathcal{L}(\mathcal{M}_2)$. Ще опишем алгоритъм, който при вход дума $\langle \mathcal{M}, \omega \rangle$, извежда код на машина на Тюринг $\mathcal{M}'$, която работи така:

- вход думата α;
- симулираме едновременно две изчисления - $\mathcal{M}_1$ върху α и $\mathcal{M}$ върху ω:
  - ако $\mathcal{M}_1$ приеме думата α, то обявяваме, че $\mathcal{M}'$ приема α и завършваме.
  - ако достигнем стъпка s, за която $\mathcal{M}_1^s$ все още не приема думата α, но $\mathcal{M}^s$ приема ω, то започваме да симулираме $\mathcal{M}_2$ върху α. Ако $\mathcal{M}_2$ приеме α, то $\mathcal{M}'$ приема α.

Получаваме, че:

$$\mathcal{L}(\mathcal{M}') = \begin{cases} L_2, & \mathcal{M} \text{ приема } \omega \\ L_1, & \mathcal{M} \text{ не приема } \omega. \end{cases}$$

Заключаваме, че:

$$\langle \mathcal{M}, \omega \rangle \notin L_u \ \leftrightarrow \ \mathcal{L}(\mathcal{M}') \in \mathscr{S}.$$

Това означава, че ефективно можем да сведем въпрос за принадлежност в $\bar{L}_u$ към въпрос за принадлежност в $L_{\mathscr{S}}$. Следователно, ако $L_{\mathscr{S}}$ е полуразрешим език, то $\bar{L}_u$ е полуразрешим език, което е противоречие. $\square$

Следствие 11. Следните езици **не** са полуразрешими:

- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ е регулярен$\}$;
- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ е безконтекстен$\}$;
- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid \mathcal{L}(\mathcal{M})$ е разрешим$\}$;
- $L = \{\langle \mathcal{M} \rangle \mid |\mathcal{L}(\mathcal{M})| = 42\}$;

4.8 Неограничени граматики

(стр. 220 от [HU79])

Определение 11. Граматиката $G = (V, \Sigma, R, S)$ се нарича неограничена граматика, ако правилата R са от вида $\alpha \to \beta$, където $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^\star$.

На англ. unrestricted grammar

Според йерархията на Чомски, това е граматика от тип 0

Лема 16. За всеки полуразрешим език L, $L = \mathcal{L}(G)$, за някоя неограничена граматика G.

Док. Нека $L = \mathcal{L}(\mathcal{M})$, където $\mathcal{M} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, s, \sqcup, F\rangle$ е детерминистична машина на Тюринг, като искаме лентата да е безкрайна само отдясно и входната дума α е поставена в началото на лентата. Ще построим граматика G, която $G = \langle V, \Sigma, R, S\rangle$, където

$$V = ((\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma) \cup \{A_1, A_2, A_3\}.$$

Правилата на G са следните:

1) $A_1 \to sA_2$;

2) $A_2 \to [a, a]A_2$, за всяка $a \in \Sigma$;

3) $A_2 \to A_3$;

4) $A_3 \to [\varepsilon, \sqcup]A_3$;

5) $A_3 \to \varepsilon$;

6) $q[a, X] \to [a, Y]p$, за всяка $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, всяко $q \in Q$, $X, Y \in \Gamma$, за които $\delta(q, X) = (p, Y, R)$;

7) $q[a, X] \to p[a, Y]$, за всяка $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, всяко $q \in Q$, $X, Y \in \Gamma$, за които $\delta(q, X) = (p, Y, N)$;

8) $[b, Z]q[a, X] \to p[b, Z][z, Y]$, за всяко $X, Y, Z \in \Gamma$, $a, b \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $q \in Q$, за които $\delta(q, X) = (p, Y, L)$;

9) $[a, X]q \to qaq$, $q[a, X] \to qaq$, $q \to \varepsilon$, за всяко $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $X \in \Gamma$, и $q \in F$.

Лесно се вижда, че, използвайки правилата 1) и 2), за всяко n, имаме

$$A_1 \to^\star s[a_1, a_1] \cdots [a_n, a_n]A_2,$$

където $a_i \in \Sigma$.

Нека сега да приемем, че $\mathcal{M}$ приема думата $\alpha = a_1 \cdots a_n$. Това означава, че за някое m, $\mathcal{M}$ използва не повече от m клетки от лентата отдясно на входната дума. Ясно е, че имаме

$$A_1 \to^\star s[a_1, a_1] \cdots [a_n, a_n][\varepsilon, \sqcup]^m.$$

Оттук нататък, можем да използваме само правилата 6), 7), 8), докато не срещнем финално състояние. С индукция по броя на стъпки в $\mathcal{M}$, можем да докаже, че ако е изпълнено $(\varepsilon, s, a_1 \cdots a_n) \vdash^\star_{\mathcal{M}} (X_1 \cdots X_{r-1}, q, X_r \cdots X_l)$, то

$$s[a_1, a_1] \ldots [a_n, a_n][\varepsilon, \sqcup]^m \to^\star_G [a_1, X_1] \cdots [a_{r-1}, X_{r-1}]q[a_r, X_r] \cdots [a_{n+m}, X_{n+m}],$$

където $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$, $a_{n+1}, \ldots, a_{n+m} = \varepsilon$, $X_1, \ldots, X_{n+m} \in \Gamma$ и $X_{l+1} = X_{l+2} = \cdots = X_{n+m} = \sqcup$.

Най-накрая, ако $q \in F$, то можем да използваме правилата от 9) и да докажем, че

$$[a_1, X_1] \cdots [a_{t-1}, X_{t-1}] q [a_t, X_t] \cdots [a_{n+m}, X_{n+m}] \to_G^\star a_1 \cdots a_n.$$

Така доказахме, че ако $\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$, то $\alpha \in \mathcal{L}(G)$, т.е. $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{L}(G)$. За да докажем обратната посока, трябва да направим подобни разсъждения. □

Лема 17. Ако $L = \mathcal{L}(G)$, където G е неограничена граматика, то L е полуразрешим език.

Док. $\mathcal{M}$ ще бъде недетерминистична машина с три ленти.

Доказателствата в [HU79] и [PL98] са различни

1) Записваме входната дума ω на първата лента на $\mathcal{M}$. Тя никога не се променя.

2) На втората лента ще имаме думата $\gamma \in (V \cup \Sigma)^\star$. В началото $\gamma := S$.

3) Недетерминистично избираме правило $\alpha \to \beta$ от граматиката G.

4) Недетерминистично избираме $\gamma_0, \gamma_1 \in (V \cup \Sigma)^\star$, за които $\gamma = \gamma_0 \alpha \gamma_1$. Тогава $\gamma := \gamma_0 \beta \gamma_1$. Ако няма такива γ_0 и γ_1, то $\mathcal{M}$ „зацикля" - текущият опит за извеждане на ω пропада.

5) Сравняваме съдържанието на първите две ленти, т.е. проверяваме дали $\omega = \gamma$. Ако $\omega = \gamma$, то спираме и казваме, че $\mathcal{M}$ разпознава думата ω. Ако $\omega \neq \gamma$, то се връщаме на стъпка 3).

Algorithm 3

```
γ := S
for all α → β ∈ R do
    if (∃γ0, γ1 ∈ (V ∪ Σ)*)[γ = γ0αγ1] then
        γ := γ0βγ1
    else...
```

□

Пример 28. Граматика за $L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Библиография

-
-
-

Библиография

[HMU01] John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, and Jeffrey D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, second ed. ed., Addison-Wesley, 2001.

[HU79] John E. Hopcroft and Jeffrey D. Ullman, *Introduction to automata theory, languages, and computation*, first ed. ed., Addison-Wesley, 1979.

[Koz97] Dexter Kozen, *Automata and computability*, Springer, 1997.

[PL98] Christos Papadimitriu and Harry Lewis, *Elements of the theory of computation*, Prentice-Hall, 1998.

[Rad62] Tibor Radó, *On non-computable functions*, Bell System Technical Journal **41** (1962), no. 3, 877 – 884.

[Ros12] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its applications*, seventh ed. ed., McGraw Hill, 2012.

[RS59] M. O. Rabin and D. Scott, *Finite automata and their decision problems*, IBM Journal of Research and Development **3** (1959), pp. 114 – 125.

[Sip97] Michael Sipser, *Introduction to the theory of computation*, PWS Publishing Company, 1997.

Азбучен указател