Дискретни разпределения

Юлиан Матев

1 септември 2004 г.

Съдържание

1. Основни понятия

Елементарни събития *Елементарно събитие* - първично понятие в теорията на вероятностите, няма формално определение подобно на точката в геометрията. Множеството от всички елементарни събития бележим с гръцката буква Ω
(омега) и наричаме "достоверно събитие". Празното множество бележим със символа за празно множество - $\emptyset$ и наричаме "невъзможно събитие".
Нека $A \in \Omega$ т.е. A е събитие. В теорията на вероятностите събитието A има смисъл на логическото твърдение "сбъднало се е някое от елементарните събития в A"
Всички събития са подмножества на Ω и с тях могат да се правят обичайните в теорията на множествата действия:

– $\overline{A} = \Omega \setminus A$ - допълнително събитие, "отрицание на A";
– $A \cap B, AB$ - съвместно сбъдване на събитията A и B;
– $A \cup B$ - сбъднало се е поне едно от събитията A и B;
– $A \subset B$ - събитието A влече събитието B.

Ще казваме че събитията A и B са *несъвместими* ако $AB = \emptyset$ За несъвместимите събития A и B вместо знака за съвместно сбъдване $\cup$ ще използваме знака "$+$" , т.е. $A \cup B = A + B$

– $A \triangle B = \overline{A}B + A\overline{B}$

Булова алгебра Множество $\mathfrak{A}$ от подмножества на Ω (не задължително всички) се нарича *булова алгебра* ако

1. $\Omega \in \mathfrak{A}$;
2. ако $A \in \mathfrak{A}$, то $\overline{A} \in \mathfrak{A}$;
3. ако $A, B \in \mathfrak{A}$ то $A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Булова алгебра $\mathfrak{A}$, която е затворена относно изброимите операции обединение и сечение, се нарича *булова σ-алгебра* - ако $A_k \in \mathfrak{A}(k = 1, 2, \dots)$, то $\cup_k A_k \in \mathfrak{A}$ и $\cap_k A_k \in \mathfrak{A}$.
Двойката $(\Omega, \mathfrak{A})$ където $\mathfrak{A}$ е булова σ-алгебра, се нарича *измеримо пространство*. Елементите на $\mathfrak{A}$ се наричат *случайни събития*.

Вероятност наричаме реалната функция $P : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ ако са в сила следните свойства:

1. *неотрицателност* - $P(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathfrak{A}$
2. *нормираност* - $P(\Omega) = 1$
3. *адитивност* - Ако $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$ и $A_{i,j} \in \mathfrak{A}$, то $P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$

Пълна група събития. Казваме че събитията $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуват *пълна група* ако:

1. $H_i \subset \Omega \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$
2. ако $\forall i \neq j, H_i \cap H_j = \emptyset$ (т.е. събитията са независими)
3. $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$ (събитията изчерпват Ω)

Събитията $H_1, H_2, \ldots, H_n$ се наричат още хипотези.

Случайна величина. Функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, такава че ако

$$L_x(\xi) = \{\omega : \omega \in \Omega, \quad \xi(\omega) < x\}$$

то

$$L_x(\xi) \in \Omega, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

наричаме *случайна величина.*

Проста случайна величина. Нека е зададена пълната група събития $(H_1, H_2, \ldots, H_n))$. Ще казваме че е определена *проста случайна величина*, ако

$$\xi(\omega) = x_i, \qquad \forall \omega \in H_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

т.е. ξ приема краен брой стойности $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Независими случайни величини. Казваме, че простите сл.в. ξ и η са независими ($\xi \perp \eta$), ако е независимо всяко от събитията на едната пълна група с всяка от събитията на другата пълна група.

Математическо очакване на проста сл. в. Нека ξ е проста случайна величина приемаща стойности $x_1, x_2, \ldots, x_n$ върху събитията от пълната група $H_1, H_2, \ldots, H_n$. *Математическо очакване* на простата случайна величина ξ върху събитията от пълната група $H_1, H_2, \ldots, H_n$ определяме като:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(H_i)$$

Свойства на математическото очакване на прости сл.в ξ, η.

1. Ако $\xi < \eta$ то $E\xi < E\eta$ - монотонност
2. $E(\alpha\xi + \beta\eta) = \alpha E\xi + \beta E\eta$ (E е линеен оператор)
3. ако $xi \geq 0$ то $E\xi \geq 0$
4. ако ξ, η са независими случайни величини ($\xi \perp \eta$)

$$E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$$

Момент от ред k на сл.в.ξ наричаме следната числова величина (когато съществува):

обикновен - $E\xi^k$

абсолютен - $E|\xi|^k$

централен - $E(\xi - E\xi)^k$

Дисперсия. Вторият централен момент на сл.в. ξ наричаме *дисперсия.* Бележим я с $D\xi$ Дисперсията може да се окаже и безкрайна. Тя е мярка за разсейване на стойностите на случайната величина ξ спрямо средната стойност $E\xi$.
Свойства на дисперсията:

1. $D\xi \geq 0$
2. $D_c = 0, \qquad c$ - константа
3. $D(c\xi) = c^2 D\xi, \qquad c$ - константа
4. ако $\xi \perp \eta$ - независими сл. в-ни, то

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D \ni$$

Дискретна случайна величина е тази сл.в която приема стойности $x_1, x_2, \ldots$ с вероятност $p_1, p_2, \ldots$

Целочислена случайна величина е тази която сл.в. която приема за стойности естествените числа

сл.в.	множество от стойности	вероятност
дискретна	$x_1, x_2, \ldots$	$p_1, p_2, \ldots$
целочислена	1, 2, ...	$p_1, p_2, \ldots$

Пораждаща моментите функция на целочислена сл.в. наричаме функцията:

$$p(s) \stackrel{def}{=} Es^\xi = \sum_{i=0}^{\infty} s^i p_i$$

Свойства на пораждащите функции

1. $p(1) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1;$
2. $p(0) = P(\xi = 0) = p_0;$
3. $p'(1) = E\xi = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i;$
4. $p''(1) = E\xi(\xi - 1) = E\xi^2 - E\xi;$
5. когато ξ и η са независими $(\xi \perp \eta)$ тогава $p_{\xi+\eta}(s) = p_\xi(s)p_\eta(s)$

Извеждане на Eξ **и** $D\xi$ **чрез пораждащата функция** $p(s)$ **за целочислена сл.в.** ξ Нека ξ е целочислена сл.в с пораждаща функция $p(s)$, нека означим с p_i вероятността сл.в. ξ да приема стойност i т.е. $P(\xi = i) = p_i$ тогава:

$$p(s) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i p_i = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \ldots + p_k s^k + \ldots$$

$$p'(s) = p_1 + 2p_2 s + 3p_3 s^2 + \ldots + kp_k s^{k-1} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i s^{i-1}$$

получаваме

$$p'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i$$

тъй като xi е целочислена сл.в т.е приема за стойности натуралните числа с вероятности $p_1, p_2, \ldots$ то

$$p'(1) = \sum_{i=1}^{\infty} ip_i = \sum_{i=1}^{\infty} iP(\xi = i) = E\xi$$

Получихме формула за математическото очакване чрез пораждащата функция, сега ще се опитаме да изчислим и дисперсията.

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 + (E\xi)^2 - 2\xi E\xi) =$$
$$= E\xi^2 + E((E\xi)^2) - 2E(\xi(E\xi)) =$$

тъй като $(E\xi)^2$ и $(E\xi)$ са константи и $Ec = c$ (E е линеен оператор) то

$$= \mathrm{E}\xi^2 + (E\xi)^2 - 2E\xi E\xi = \mathrm{E}\xi^2 + (E\xi)^2 - 2(E\xi)^2 =$$
$$= \mathrm{E}\xi^2 - (E\xi)^2 = \mathrm{E}\xi^2 - E\xi + E\xi - (E\xi)^2 =$$
$$= \mathrm{E}\xi(E\xi - 1) + E\xi - (E\xi)^2 = p''(1) + p'(1) + (p'(1))^2$$

получихме следните формули:

$E\xi = p'(1)$
$D\xi = p''(1) + p'(1) + (p'(1))^2$

2. Равномерно разпределение

Нека ξ е (целочислена) сл.в. Ще казваме че ξ равномерно разпределена ако множеството от стойностите и съвпада със $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\ \}$ и ξ приема всяка една от тези стойности с вероятност равна на $\frac{1}{n}$ т.е. $P(\xi = i) = \frac{1}{n}$

Пример за равномерно разпределение е разпределението получено при хвърлянето на правилен зар. Вероятност да се падне 5 е $\frac{1}{6}$ каквато е и вероятността да се падне кое да е число от числата $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

Нека ξ е целочислена сл.в. за която

æ	H_1	H_2	$\ldots$	H_n
$\xi()$	1	2	$\ldots$	n
$P()$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\ldots$	$\frac{1}{n}$

Нека пресметнем математическото очакване и дисперсията за това разпределение:

$$E\xi = \sum_{i=1}^{n} ip_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 + (E\xi)^2 - 2\xi E\xi) =$$
$$= E\xi^2 + (E\xi)^2 - 2(E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 =$$

Тъй като $E\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2 =.$[1]$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} i^2$ следователно

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} i^2 - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =^{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4 =}$$

$$= \frac{(n+1)\left(2(2n+1) - 3(n+1)\right)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

Получихме:

Равномерно разпределение
$E\xi = \frac{n+1}{2}$ $D\xi = \frac{n^2-1}{12}$

[1] $E\xi^2 =$? Случайната величина $E\xi$ има същото разпределение както и $E\xi^2$. Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е пълната група събития съответстваща на ξ и съответните им стойности са $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогава пълната група съответстваща на $E\xi^2$ е $\{H_iH_j, i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, n\}$ има същото разпределение като $H_1, H_2, \ldots, H_n$ защото $H_iH_i = H_i$ и $H_iH_j = \emptyset$ за $i \neq j$ и приема стойности върху това пълно множество съответно $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$(за справка Теорема 4.1 стр.22 от доц. Д. Въндев,"Записки по ТВ") следователно $E\xi^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_i^2$

[2] $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ доказва се тривиално по индукция

3. Биномно разпределение

Схема на Бернули. Редица от независими еднакво разпределени случайни величини $\{\xi_i, i = 1, 2, \ldots\}$, всяка от които приема две стойности: 1 и 0 с вероятност(съответно)p и q.
Да разгледаме сумата η_n на n сл.в. от схемата на Бернули. Това е целочислена случайна величина, приемаща стойности от 0 до n. Ние ще я интерпретираме като *брой успехи от n опита с постоянна вероятност p за успех във всеки опит*
Вероятността тази сл.в. да приеме стойност k наричаме *биномна* и означаваме с $b(n, k.p)$

$$P(\eta_n = k) = b(n, k, p)$$

Нека се опитаме да пресметнем тази вероятност. Първо да пресметнем вероятността на събитието

$$W_{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\xi_i = \epsilon_i\},$$

където $\epsilon \in \{0, 1\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тъй като сл.в. са независими и $P(\xi = 1) = p$, получаваме

$$P(W_{\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n}) = p^{\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i} q^{n - \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i}$$

Ако означим $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ и $k = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i$, ще получим

$$P(\eta_n = k) = \sum \epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_n = kp^k q^{n-k} \sum_{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_n = k} 1.$$

От тук получаваме

$$P(\eta_n = k) = b(n, k, p) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k}$$

Нека пресметнем пораждащата функция на това разпределение:

$$F_{\eta_n}(x) \stackrel{def}{=} Ex^{\eta_n} = Ex^{(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)} = E(x^{\xi_1} x^{\xi_2} \ldots x^{\xi_n}) =$$

но тъй като ξ_i са независими сл.в. $E\xi_i\xi_j = E\xi_i E\xi_j$ и са еднакво разпределени т.е. $Ex^{\xi_i} = Ex^{\xi_j}$ продължаваме равенството:

$$= \prod_{i=1}^{n} Ex^{\xi_i} = \left(Ex^{\xi_1}\right)^n = \left(\sum_{i=0}^{1} x^i p_i\right)^n =$$

но ξ_i приема стойности 0 и 1 съответно с вероятност p и q следователно:

$$= (qx^0 + px)^n = (px + q)^n$$

След като имаме формула за функцията на разпределение лесно можем да намерим производните и, а от там да пресметнем математическото очакване и дисперсията:
$F'_{\eta_n}(x) = np(px + q)^{n-1}$
$F''_{\eta_n}(x) = n(n-1)p^2(px + q)^{n-2}$

$E\xi = F'_{\eta_n}(1) = np(p + q)^(n - 1) = np$, защото $p + q = 1$
$D\xi = F''_{\eta_n}(1) + F'_{\eta_n}(1) - (F'_{\eta_n}(1))^2 =$
$n(n-1)p^2 + np + n^2p^2 = np(p(n-1) + 1 - np) = np(1-p) = npq$

Биномно разпределение
$E\xi = np$ $D\xi = npq$

4. Геометрично разпределение

Дефинираме сл.в. ξ, стойностите на която можем да интерпретираме като "брой успешни опити до първият неуспешен". Опитите са независими и с еднаква вероятност за успех. Случайната величина ξ има геометрично разпределение ако $P(\xi = k) = p^k q$
Директно пресмятаме $E\xi$ и $D\xi$ без да намираме функцията на разпределение:

$$E\xi = \sum_{i=0}^{\infty} i p^i q = q \sum_{i=0}^{\infty} i p^{i-1} =$$

тъй като $p < 1$ то $\sum_{i=1}^{\infty} p^i = \frac{1}{1-p}$, сума на геометрична прогресия, след диференциране на това равенство получаваме
$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{1-p}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} i p^{i-1}$ следователно

$$E\xi = qp \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{1-p}\right) = qp \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{q}$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E(\xi^2 + (E\xi)^2 - 2\xi E\xi) = E\xi^2 + (E\xi)^2 - 2(E\xi)^2 =$$

$$= E\xi^2 - (E\xi)^2 = E\xi(\xi - 1) + E\xi - (E\xi)^2$$

$$E\xi(\xi - 1) = q \sum_{i=0}^{n} i(i-1)p^i = qp^2 \sum_{i=0}^{n} i(i-1)p^{i-2} =$$

$$= qp^2 \frac{\partial^2}{\partial^2 p}\left(\frac{1}{1-p}\right) = qp^2 2 \frac{1}{1-p}^3 = 2\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$D\xi = 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}$$

Геометрично разпределение
$E\xi = \frac{p}{q}$ $D\xi = \left(\frac{p}{q}\right)^2 + \frac{p}{q}$

5. Хипергеометрично разпределение

Да разгледаме една задача от статистическия качествен контрол. Нека е дадена партида съдържаща N изделия, от които M са дефектни. Правим случайна извадка от $n < N$ изделия. Пита се каква е вероятността точно m от тях да са дефектни.

Казваме, че целочислената сл.в. ξ има хипергеометрично разпределение, ако:

$$P(\xi = m) = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \qquad m = 0, 1, \ldots, n$$

Тази формула са извежда лесно. Броят на всички възможни извадки без връщане очевидно е

$$C_N^n$$

(смятаме ги за равновероятни). "Благоприятните тези които съдържат точно m дефектни детайла, могат да се получат чрез комбиниране на извадка от M на m дефектни и извадка от

$N-M$ на $n-m$ изправни. Тъй като извадките от здрави и дефектни детайли се комбинират без ограничения, общият брой на "благоприятните"извадки става

$$P(\xi = m) = \frac{\mathrm{C}_M^m \mathrm{C}_{N-M}^{n-m}}{\mathrm{C}_N^n}$$

Остава да пресметнем математическото очакване и дисперсията за това разпределение

$$E\xi = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\mathrm{C}_M^i \mathrm{C}_{N-M}^{n-i}}{\mathrm{C}_N^n} = \ldots = n\frac{M}{N}$$

$$D\xi = \ldots^{3} = n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-1}{N-n}$$

Хипергеометрично разпределение
$E\xi = n\frac{M}{N}$ $D\xi = n\frac{M}{N}\frac{N-M}{N}\frac{N-1}{N-n}$

6. Разпределение на Поасон

Поасоновото разпределение се определя лесно като граница на биномни разпределения, когато $x \to \infty$ така че $np \to \lambda > 0$. Сл. в. може да приема всякакви целочислени стойности:

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

То е особено подходящо за моделиране на броя на случайни редки събития - брой частици на единица обем, брой радиоактивни разпадания за единица време и т.н. Математическото очакване и дисперсията на това разпределение съвпадат:

$$E\xi = D\xi = \lambda$$

Това най-лесно се вижда от пораждащата функция на Поасоновото разпределение, която се пресмята директно:

$$E\xi^{\eta} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{\lambda(s-1)}$$

Разпределение на Поасон
$E\xi = \lambda$
$D\xi = \lambda$

[3] Според учебника се доказва много лесно.