

28. Дискретни разпределения. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

28. Дискретни разпределения. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

Случайните величини са числови функции, определени върху множеството от елементарни събития Ω , но тяхното определение силно зависи от това кои са случайните събития Ω .

Пълна група от събития наричаме множеството от всички събития (непресичащи се), които могат да се „случат“ в резултат от даден опит. При това обединението от събитията в пълната група съвпада с Ω .

Нека е зададена пълната група събития $(H_1, H_2, \dots, H_n)$. Ще казваме, че е определена **проста случайна величина** ξ , ако $\xi(\omega) = x_i$ за всяко $\omega \in H_i$, $i=1, 2, \dots, n$, където x_i е реално число. Тоест случайната величина е реална функция, съпоставяща на събитията от пълна група събития реални числа.

Ще казваме, че функцията $\xi(\omega)$, определена на Ω със стойности в R , е **случайна величина**, ако за всяко $x \in R^1$ множеството $\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{A}$ (булевата σ -алгебра).

Реалната функция P , определена върху елементите на булевата σ -алгебра $\mathfrak{A}$, се нарича **вероятност**, ако удовлетворява условията:

1. **Неотрицателност:** $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathfrak{A}$;
2. **Нормираност:** $P(\Omega) = 1$;
3. **Адитивност:** $P(A_1 + A_2 + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$.

Ще наричаме **функция на разпределение** на случайната величина ξ функцията $F(x) = P(\omega: \xi(\omega) < x)$. Тоест функцията на разпределение е вероятността случайната величина да приеме стойност, по-малка от дадена.

Функцията $F(x)$ е монотонно ненамаляваща и непрекъсната отляво. Освен това $F(-\infty)=0$ и $F(\infty)=1$.

Случайна величина, която приема само стойностите $x_1, x_2, x_3, \dots$ с вероятности съответно $p_1, p_2, p_3, \dots$ се нарича **дискретна случайна величина**.

За стойностите $p_1, p_2, \dots$ е изпълнено, че $\sum p_i = 1$ и $1 \geq p_i \geq 0$. За дискретните случайни величини функцията на разпределение $F(x)$ има само скокове в точките x_i и навсякъде другаде е константа. В точката x_i скокът ѝ е равен точно на числото p_i .

Ако случайната величина е такава, че за всяко x съществува производна на функцията на разпределение $f(x)=F'(x)$, то ще я наричаме **непрекъсната случайна величина**. Производната наричаме **плътност**.

Случайна величина, приемаща за стойности натуралните числа, наричаме **целочислена случайна величина**.

Нека ξ е дефинирана във вероятностното пространство $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, а $F(x) = P(\xi < x)$, $x \in R_1$ е нейната функция на разпределение. Средна стойност (**математическо очакване**) на ξ – означава се с $E\xi$, се дефинира с равенството:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$$

при условие, че този интеграл (в смисъл на Лебег-Стилтес) е абсолютно сходящ, тоест когато $E\{|\xi|\} < \infty$.

Математическо очакване на проста случайна величина ξ , приемаща стойности $x_1, x_2, \dots, x_n$ върху събитията от пълната група, определяме като $\sum_{k=1}^n x_k P(H_k)$.

Дисперсията на случайната величина ξ се определя като числото $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$, като тя може и да е безкрайна. За непрекъснати и дискретни разпределения, тя се смята съответно по формулите:

28. Дискретни разпределения. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

$$\mathbb{D}\xi = \int (x - \mathbb{E}\xi)^2 f(x) dx, \quad \mathbb{D}\xi = \sum_i (x - \mathbb{E}\xi)^2 p_i$$

Числата $a_k = \mathbb{E}\{(\xi - c)^k\}$ се наричат **момент от k -ти ред** на случайната величина ξ относно константата c . При $c = 0$ тези моменти се наричат **начални**, а при $c = \mathbb{E}\xi$ – **централни**.

Пораждащата функция на целочислена случайна величина ξ се задава с формулата:

$$p(s) = \mathbb{E}s^\xi$$

Пораждащата функция е удобна, защото винаги съществува при достатъчно малко s , например при $s \leq 1$.

Свойства:

- $p(1) = \mathbb{E}1^\xi = \mathbb{E}1 = 1$
- $p(0) = \mathbb{E}0^\xi = P(\xi = 0)$
- $p'(1) = (\mathbb{E}1^\xi)' = \mathbb{E}(1^\xi)' = \mathbb{E}\xi$, когато съществува
- $p''(1) = \mathbb{E}\xi(\xi - 1) = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi$, когато съществува
- Когато $\xi \perp \eta$, $p_{\xi+\eta}(s) = p_\xi(s)p_\eta(s)$.

Редица от независими, еднакво разпределени случайни величини $\{\xi_i, i=1, 2, \dots\}$, всяка от които приема две стойности: 1 и 0 с вероятности съответно p и $q=1-p$, наричаме **схема на Бернули**.

Разглеждаме сумата η_n на n случайни величини от схемата на Бернули. Това е целочислена случайна величина, приемаща стойности от 0 до n . Тази случайна величина ще я разглеждаме като брой успехи от n опита с постоянна вероятност p за успех във всеки опит. Разпределението на такава случайна величина наричаме **биномно**. Биномните вероятности се пресмятат по формулата:

$$b(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Тогава: $\mathbb{E}\eta_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\xi_i = n\mathbb{E}\xi_1 = n(1 \cdot p + 0 \cdot q) = np$ и $\mathbb{D}\eta_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}\xi_i = n\mathbb{D}\xi_1 = n(\mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2) = n(p - p^2) = npq$.

В задачите, където искаме да намерим вероятността първият успех в серия от опити, във всеки от които вероятността за неуспех да е p , да постигнем на m -тия опит, ще използваме геометричното разпределение.

Казваме, че целочислената случайна величина ξ има **геометрично разпределение**, ако

$$P(\xi = m) = p^m q, m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогава математическото очакване и дисперсията на геометричното разпределение ще бъдат съответно

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} kp^k q = q \sum_{k=0}^{\infty} kp^k = qp \sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1} = qp \frac{d}{dp} \left(\frac{1}{1-p} \right) = \frac{p}{q} \\ \mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\xi - (\mathbb{E}\xi)^2 = \mathbb{E}\xi(\xi - 1) + \mathbb{E}\xi - (\mathbb{E}\xi)^2 \\ &= q \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p^k + \frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q} \right)^2 = qp^2 \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1}{1-p} \right) + \frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q} \right)^2 = 2 \left(\frac{p}{q} \right)^2 \\ &\quad + \frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q} \right)^2 = \left(\frac{p}{q} \right)^2 + \frac{p}{q} \end{aligned}$$

Казваме, че целочислената случайна величина има **хипергеометрично разпределение**, ако

$$P(\xi = m) = \frac{\binom{n}{m} \binom{N-n}{M-m}}{\binom{N}{M}}$$

28. Дискретни разпределения. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

Да разгледаме следната задача. Нека е дадена партида, съдържаща N изделия, от които M са дефектни. Правим случайна извадка от $n < N$ изделия. Пита се каква е вероятността точно m от тях са дефектни. Оказва се, че разпределението на случайната величина брой дефектни е хипергеометричното, тъй като броят на всички възможни извадки (равновероятни) са $\binom{N}{n}$. „Благоприятните“ са тези, които съдържат точно m дефектни детайла, могат да се получат чрез комбиниране на извадка от m дефектни и извадка от

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{M-k}}{\binom{N}{M}} = \frac{1}{\binom{N}{M}} \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} = \frac{1}{\binom{N}{M}} \cdot M \binom{N-1}{n-1} \\ &= \frac{n! (N-n)!}{N!} \cdot M \frac{(N-1)!}{(n-1)! (N-1-n+1)!} = \frac{n \cdot M}{N}\end{aligned}$$

(Обяснение:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\binom{N}{M}} \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} &= \frac{M \binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{M}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k}}{M \binom{N-1}{n-1}} = \frac{M \binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{M}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{N-n}{M-k} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{N-1}{M-1}}, \quad \text{но} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{N-n}{M-k} \binom{n-1}{k-1}}{\binom{N-1}{M-1}} &\text{ е сума от вероятности – вероятност да изтеглим } n-1 \text{ предмета, от}\end{aligned}$$

които точно $k-1$ да са дефектни, като теглим от $N-1$, от които $M-1$ са дефектни. Но тъй като разглеждаме всички случаи за k , тоест това е сума от вероятностите на всички възможности, тоест е 1.)

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}\xi(\xi-1) + \mathbb{E}\xi - (\mathbb{E}\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\binom{n}{k} \binom{N-n}{M-k}}{\binom{N}{M}} + \frac{nM}{N} - \frac{n^2 M^2}{N^2} \\ &= n \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \frac{N-1}{N-n}\end{aligned}$$

Така ако отбележим вероятността при единичен избор да попаднем на дефектен елемент с $p = \frac{M}{N}$ за математическото очакване на хипергеометричното разпределение ще получим np , а за дисперсията му – $npq \frac{N-1}{N-n}$.

Поасоновото разпределение се определя като граница на биномни разпределения, когато $n \rightarrow \infty$, така че $np \rightarrow \lambda > 0$. Случайната величина може да приема всякакви целочислени стойности:

$$P(\xi = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

То е подходящо за моделиране на броя на случайни редки събития като брой радиоактивни разпадания на единица време.

Пораждащата функция на Поасоновото разпределение е:

$$p(s) = \mathbb{E}s^\eta = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k s^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}$$

От нея смятаме математическото очакване и дисперсията на Поасоновото разпределение:

28. Дискретни разпределения. Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\xi &= p'(1) = e^{\lambda(s-1)} \cdot \ln(e^\lambda) = e^0 \cdot \lambda = \lambda \\ \mathbb{E}\xi^2 - \mathbb{E}\xi &= p''(1) = \left(e^{\lambda(s-1)} \cdot \ln(e^\lambda) \right)' = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} = \lambda^2 \Rightarrow \mathbb{E}\xi^2 = \lambda^2 + \lambda \\ \mathbb{D}\xi &= \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\end{aligned}$$