Симетрични матрици

В тази страница ще се запознаем с
- *[определение](#) за симетрична матрица и основни примери;*
- *[Свойството 1](#),че симетричните матрици образуват подпространство на пространството на всички квадратни оператори*
- *[Свойство 2](#) и [свойство 3](#) за обратна матрица и произведение на симетрични матрици.*
- *[Свойство 4](#) , чрез което можем да получаваме симетрична матрица от произволна матрица.*
- *[Задача](#) за упражнение.*

Определение за симетрична матрица:

Една квадратна матрица A се нарича **симетрична**, ако е изпълнено $a_{i,j} = a_{j,i}$ за произволни стойности на индексите $i, j \in \{1, \ldots, n\}$

Примери на симетрични матрици:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

С други думи една квадратна матрица A е симетрична, точно когато съвпада със своята транспонирана, т.е. $A = A^t$.Това условие по-лесно се проверява отколкото условието от определението.

Свойства на симетричните матрици:

Свойство 1:

Нека A и B са симетрични матрици, т.е. $A = A^t$ и $B = B^t$, тогава:

- λA е симетрична матрица , *защото* $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$
- $A + B$ е симетрична матрица , *защото* $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$

Това свойство означава, че множеството от всички симетрични матрици от фиксиран ред образуват подпространство на пространството от всички квадратни матрици от този ред .

Свойство2 :

Ако матрицата A е обратима и симетрична, то и нейната обратна A^{-1} е симетрична.

Доказателство:

Нека да бележим с B обратната матрица A^{-1} , тогава от $A = A^t$ имаме:

$B^t A = B^t A^t = (AB)^t = E^t = E$ От това равенство се вижда, че B^t също е обратна матрица за A , но всяка обратима матрица има единствена обратна, то $B^t = B \Rightarrow$ A^{-1} е симетрична матрица.

Свойство 3

Ако две симетрични матрици A и B комутират помежду си ($A.B = B.A$), то тяхното произведение също е симетрична матрица.

Доказателство: $(AB)^t = B^t A^t = BA = AB$

Пример: Да разгледаме следните симетрични матрици $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- A и B не комутират и произведението им $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ не е симетрична матрица
- матриците A и C комутират и за тях имаме $AC = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

Като използвате, че $(A.B)^t = B^t.A^t$ опитайте се да докажете следното свойство, чрез което можем да получаваме симетрични матрици.

Свойство 4: $A.A^t$ е симетрична матрица, за произволна матрица A.

Пример: Нека $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, тогава $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и така получаваме следните симетрични матрици: $A.A^t = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -8 \\ 1 & -8 & 17 \end{pmatrix}$ и $A^t.A = \begin{pmatrix} 21 & -1 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$.

Симетричен оператор - определение и основни свойства

В тази страница ще се запознаем с:
- *определение за симетричен оператор и основни примери;*
- *свойството, че симетричните оператори образуват подпространство на пространството на всички линейни оператори*
- *връзка между симетричен оператор в крайно-мерно пространство и симетрични матрици. Повече свойства на симетричните матрици са дадени в страницата симетрични матрици.*
- *Задачи за симетричен оператор- зад.1, зад.2,*

Определение за симетричен оператор

Линейният оператор $\varphi : E \to E$, действащ в Евклидово пространство E, се нарича **симетричен**, ако за всеки два елемента $x, y \in E$ е изпълнено равенството:

$$(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$$

Пример: Във всяко Евклидово пространство нулевия и тъждествения оператор са тривиални примери на симетричен оператор
.

Свойство :

Нека φ и ψ са симетрични оператори в евклидово пространство E, тогава $\varphi+\psi$ и $\alpha.\varphi$ също са симетрични оператори за произволно реално число α.

Доказателство: $((\alpha\varphi)(x), y) = (\alpha\varphi(x), y) = \alpha.(\varphi(x), y) = \alpha.(x, \varphi(y)) = (x, \alpha\varphi(y)) = (x, (\alpha\varphi)(y))$

$((\varphi+\psi)(x), y) = (\varphi(x), y) + (\psi(x), y) = (x, \varphi(y)) + (x, \psi(y)) = (x, (\varphi+\psi)(y))$

Това свойство ни задава, че множеството на всички симетрични оператори образува линейно подпространство на пространството от всички линейни оператори в едно Евклидово пространство.

Пример: В едномерно Евклидово пространство всеки линеен оператор може да се получи чрез умножаване на число по тъждествения оператор и следователно всеки линеен оператор в едномерно пространство е симетричен.

Задача:

В n-мерно Евклидово пространство E са дадени два единични и ортогонални вектори a и b , т.е. $|a|=1$, $|b|=1$ и $(a, b)=0$ и изображението $\varphi : E \to E$, което е определено по следния начин : $\varphi(x)=(a,x).b+(b,x).a$ за произволен вектор $x \in E$. Да се докаже, че φ е симетричен оператор в E и че $\varphi^3 = \varphi$.

Решение.....

Задача за упражнение:

Нека φ и ψ са симетрични оператори действащи в евклидово пространство E. Да се докаже, че $\varphi \circ \psi + \psi \circ \varphi$ е симетричен оператор.

Връзка между симетрични оператори и симетрични матрици

Теорема 1:

Нека E е крайномерно евклидово пространство и φ е симетричен оператор в E.
Тогава φ има симетрична матрица в кой да е ортонормиран базис на E .

Доказателство:

Нека $e_1, e_2, \dots, e_n$ е един ортонормиран базис на E $\Rightarrow$ $(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{за } i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, и нека φ има

матрица $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ в този базис. $\Rightarrow$ $\varphi(e_i) = a_{1,i}e_1 + a_{2,i}e_2 + \dots + a_{n,i}e_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}e_k$.

$(\varphi(e_i), e_j) = \left(\sum_k a_{k,i}e_k, e_j\right) = \sum_k a_{k,i}(e_k, e_j) = a_{j,i}$ и $(e_i, \varphi(e_j)) = (\varphi(e_j), e_i) = a_{i,j}$.

Тъй като φ е симетричен, то $(\varphi(e_i), e_j) = (e_i, \varphi(e_j))$. Така получаваме, че $a_{i,j} = a_{j,i}$ за произволни индекси $i, j \in \{1, \dots, n\}$, т.е. A е симетрична матрица.

Теорема 2

Нека E е крайномерно Евклидово пространство и $e_1, e_2, \dots, e_n$ е ортонормиран базис в E . Ако един линеен оператор $\varphi : E \to E$ има симетрична матрица в $e_1, e_2, \dots, e_n$, то оператора е симетричен.

Доказателство:

Нека $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ и $y = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_n e_n$ са два произволни вектори от E и $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ е матрицата на φ в базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$, тогава:

$$A.\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(x)=\mu_1 e_1+\dots+\mu_n e_n \quad \text{и} \quad A.\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\nu_1\\ \vdots\\ \nu_n\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi(y)=\nu_1 e_1+\dots+\nu_n e_n$$

Пресмятаме $(\varphi(x), y)$ и $(\varphi(y), x)$

$$(\varphi(x), y)=\mu_1\beta_1+\cdots+\mu_n\beta_n=(\mu_1 \cdots \mu_n).\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\left(A.\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right)^t.\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=(\alpha \cdots \alpha).A^t.\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

$$(x, \varphi(y))=\alpha_1\nu_1+\cdots+\alpha_n\nu_n=(\alpha_1 \cdots \alpha_n).\begin{pmatrix}\nu_1\\ \vdots\\ \nu_n\end{pmatrix}=(\alpha_1 \cdots \alpha_n).\left(A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\right)=(\alpha \cdots \alpha).A.\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

A е симетрична матрица $\Rightarrow$ $A = A^t$ откъдето получаваме че $(\varphi(x), y) = (x, \varphi(y))$

Горните две теореми могат да се обединят в една по следния начен:
В крайномерно Евклидово пространство един линеен оператор е симетричен, тогава и само тогава когато матрицата му в кой да е ортонормиран базис е симетрична.

Пример: Спрямо стандаретен ортонормиран базис на двумерното Евклидово пространство са дадени векторите $a=(1,1)$ и $b=(1,2)$. Спрямо базиса a, b линейния оператор φ има матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Виждаме, че $\varphi(a) = 1.a + 1.b = (2, 3)$ и $(\varphi(a), b) = 1.2 + 2.3 = 8$. Аналогично $(a, \varphi(b)) = 2$
и операторът не е симетричен въпреки, че има симетрична матрица в един базис, който не е ортонормиран.

Собствени вектори на симетричен оператор

Тази страница е посветена на доказателството на съществуване на канонизация при симетричните оператори и тя включва:
- *Теорема 1, в която се доказва, че симетричните матрици имат реални характеристични корени;*
- *Теорема 2: даваща че за симетричен оператор собствените вектори с различни собствени стойности са ортогонални;*
- *Теорема за съществуването на каноничен вид на симетричен оператор;*
- *Основни следствия от теоремата за канонизацията*

Начина за прилагане на канонизацията е показан на следващата страница...

За да се намерят собствените вектори на един линеен оператор трябва първо да бъдат определени неговите собствени стойности, т.е. за матрицата на оператора в кой да е базис трябва да се определят характеристичните корени на матрицата и собствени стойности на оператора са тези характеристични корени на матрицата, които са реални числа. Доказахме Теорема, от която имаме, че в ортонормиран базис матрицата на симетричен оператор есиметрична и затова ще определим какви могат да са корените на симетрична матрица.

Характеристиечен полином *на една квадратна матрица A е* $f_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$.

Степента на характеристичния полином е равна на реда на матрицата и неговите корени се наричат ***характеристични корени*** *на матрицата.*

Известно е, че всеки полином с реални коефициенти има комплексни корени, но за реална симетрични матрици ще докажем, че всички характеристични корени са реални числа.

Теорема 1.

Характеристичните корени на симетрична матрица с реални елементи са реални числа.

Доказателството е изнесено на следната страница..

Един ***ненулев*** *вектор g се нарича* ***собствен вектор*** *за линейния оператор φ, когато съществува число λ (което се нарича* ***собствена стойност****), такова че: $\varphi(g) = \lambda.g$.*

Като следствие от теорема 1 непосредствено получаваме, че всеки симетричен оператор има собствени вектори.

Теорема 2.

Нека φ е симетричен оператор в евклидовото пространство E и векторите a и b са собствени вектори за различни собствени стойности. Тогава a и b са ортогонални.

Доказателство:

Нека $\varphi(a)=\lambda a$ и $\varphi(b)=\mu b$. Тогава е изпълнено $\lambda\neq\mu$ и следователно:

$$\underbrace{(\varphi(a),b)=(a,\varphi(b))}$$
$$\Downarrow$$
$$\underbrace{\lambda(a,b)=(\lambda a,b)=(a,\mu b)=\mu(a,b)}$$
$$\Downarrow$$
$$(\lambda-\mu).(a,b)=0\Rightarrow(a,b)=0$$

За да докажем теоремата за канонизация на симетричен оператор, ще ни е нужна следната лема:

Лема:

Ако g е собствен вектор на симетричния оператор φ и h е вектор перпендикулярен на g тогава $\varphi(h)$ също е перпендикулярен на g .

Доказателство:

Векторът g е собствен $\Rightarrow \varphi(h)g)=\lambda.g$. Тогава от $(g,h)=0$ имаме:

$$(g,\varphi(h))=(\varphi(g),h)=(\lambda.g,h)=\lambda(g,h)=0$$

Теорема. (канонизация на симетричен оператор):

За всеки симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство съществува ортонормиран базис от собствени вектори на оператора.

Доказателство:

Доказателството се провежда по идукция онтосно n, размерността на пространството E

- $n=1=dim E$ и нека векторът e е единичен вектор от $E.$ Този вектор сформира ортонормиран базис на пространството E и $\varphi(e)=\lambda.$ $\Rightarrow$ твърдението е вярно.
- Нека твърдението е доказано за произволно $(n-1)$ - мерно евклидово пространство и нека E е произволно $n-$ мерно евклидово пространство.
  - Нека λ_1 е реален характеристичен корен на матрицата на оператора (такъв съществува според Теорема 1) и нека a е собствен вектор, за който $\varphi(a)=\lambda_1.a.$
  - Нека бележим с U множеството от всички вектори на E, които са ортогонални на $a,$ т.е. $U=\{x\in E \mid (x,a)=0\}$. За U имаме:
    - U е подпространство на E с размерност $n-1$ (пространството U е ортогонално допълнение на линейната обвивка на вектора a);
    - В Лемата доказахме, че за всеки вектор x от U е изпълнено $\varphi(x)\in U$, следователно можем да резглеждаме φ също и като симетричен оператор действащ в пространството U .
    - Съгласно индукционното предположение за U съществува ортонормиран базис $e_1,\dots,e_{n-1}$ от собствени вектори на оператора φ.
  - Нека e_n е единичен вектор получен чрез нормиране от a, тогава ясно е че векторите $e_1,\dots,e_n$ образуват ортонормиран базис на E и всички те са собствени вектори за оператора φ. Следователно твърдението е вярно и за пространството E.
- По индукция следва, че твърдението е вярно за произволно крайномерно евклидово пространство .

Следствие 1:

За всеки симетричен оператор съществува ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е диагонална. *(това е базиса от собствени вектори на оператора)*

*Една квадратна матрица T се нарича **ортогонална**, когато нейната обратна съвпада с транспониранта и, $T^{-1}=T^t$.*

В Евклидово пространство матрицата на прехода от един ортонормиран базис към друг ортонормиран базис е ортогонална матрица.

Непосредствено от формулата за смяна на матрицата но оператор при смяна на базиса получаваме следното:

Следствие 2:

За всяка симетрична матрица A съществува ортогонална матрица T, и диагонална матрица $D,$ такава че $D=T^{-1}AT$.