Тема 19

Метод на резолюцията в съждителното и предикатното смятане от първи ред. Хорнови клаузи

Дефинира се понятието съждителен резолютивен извод и се доказва теоремата за коректност и пълнота на резолютивната изводимост. Описва се методът на резолюцията. Дефинира се понятието Хорнов дизюнкт и се доказва, че изпълнимите множества от Хорнови дизюнкти имат най-малък модел.

Дефиниция:
Съждителен дизюнкт се нарича крайно множество от съждителни литерали (променливи и отрицания на променливи)

Дефиниция:
Нека D_1 и D_2 са дизюнкти, а L е литерал. Казваме, че **правилото за резолюцията е приложимо за двойката** D_1, D_2 относно литерала L ако $L \in D_1$ и $L^\partial \in D_2$.
Записваме $!\,R_L(D_1, D_2)$. Резултатът от прилагането му означаваме с $R_L(D_1, D_2)$, като $R_L(D_1, D_2) \leftrightharpoons (D_1\{L\}) \cup (D_2\backslash\{L^\partial\})$

Дефиниция:
Дизюнктът D е **резолвента** на D_1 и D_2, ако съществува литерал L, такъв че $D = R_L(D_1, D_2)$

Лема:
Основание за коректността
Нека I е булева интерпретация, D_1 и D_2 са съждителни дизюнкти и $D = R_L(D_1, D_2)$.
Ако $I \vDash \{D_1, D_2\}$, то $I \vDash D$.
Доказателство:
Ще разгледаме два случая: $I \vDash L$ и $I \nvDash L$, като за всеки от тях ще докажем, че $I \vDash D$.

1. $I \vDash L$. Тогава $I \nvDash L^\partial$. Тъй като $I \vDash D_2$, има литерал M, $M \in D_2$ и $I \vDash M$. Нека M е един такъв литерал. Тогава от $I \nvDash L^\partial$ и $I \vDash L$, заключваме че $M \neq L^\partial$. Следователно $M \in D_2\backslash\{L^\partial\} \subseteq (D_1\backslash\{L\}) \cup (D_2\backslash\{L^\partial\}) = D$, поради което $I \vDash D$.
2. $I \nvDash L$. Тъй като $I \vDash D_1$, има литерал K, $K \in D_1$ и $I \vDash K$. Нека K е един такъв литерал. Тогава от $I \vDash K$ и $I \nvDash L$, заключваме че $K \neq L$. Следователно $K \in D_1\backslash\{L\} \subseteq (D_1\backslash\{L\}) \cup (D_2\backslash\{L^\partial\}) = D$, откъдето $I \vDash D$.

Дефиниция:

- $S^* \leftrightharpoons \bigcup_{n=0}^{\infty} S_n$, където $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots$ (S– множество от дизюнкти)
- $S_0 \leftrightharpoons S$
- $S_{n+1} \leftrightharpoons S_n \cup \{D |$има литерал L и има дизюнкти $D_1, D_2 \in S_n : D = R_L(D_1, D_2)\}$

Наблюдение:

Нека I е булева интерпретация. Тогава $I \vDash S \leftrightarrow I \vDash S^*$ - непосредствено от лемата и дефиницията на S^*

Следствие:

Ако $\blacksquare \in S^*$, то S е неизпълнимо

Дефиниция:

Нека S е множество от дизюнкти. **Резолютивен извод** от S се нарича крайна редица от дизюнкти, такава че всеки нейн член е или от S или е резолвента на два предходни члена. Казваме, че D е резолютивно изводим от S (и бележим с $S \overset{r}{\vdash} D$) ако има резолютивен извод от S, чийто последен член е дизюнктът D.

Твърдение:

Нека S е множество от дизюнкти. D е дизюнкт. Тогава $S \overset{r}{\vdash} D \leftrightarrow D \in S^*$

Доказателство:

($\rightarrow$) Нека $S \overset{r}{\vdash} D$. Ще докажем, че $D \in S^*$:

Има резолютивен извод $S -\ D_1, \dots, D_n$ на D. С индукция ще докажем, че ако $D_1, \dots, D_n$ е резолютивен извод от S и $k \leq n$, то $D_k \in S^*$

1. Ако D_1 е резолютивен извод от S, то $D_1 \in\ S$
2. *Нека всеки път когато $D_1, \dots, D_n$ е резолютивен извод от S, да е изпълнено $D_1 \in S^*$, за $k = 1, \dots, n$*
3. *Разглеждаме резолютивен извод от S с дължина $n + 1$: $D_1, \dots, D_n, D_{n+1}$.*
   Нека $1 \leq k \leq n + 1$
   - За $k \leq n$, $D_1, \dots, D_n$ е резолютивен извод от S и $D_1, \dots, D_n \in S^*$
   - За $k = n + 1$ са в сила:
     - $D_{n+1} \in\ S\ \rightarrow\ D_{n+1} \in S^*$
     - $R_L(D_i, D_j)$, $i, j < n + 1$ и $D_i, D_j \in S^*$

Но S^* е затворено относно правилото за резолюцията, следователно $D_{n+1} \in S^*$

($\leftarrow$) Нека $D \in S^*$. Ще докажем, че $S \overset{r}{\vdash} D$:

Нека $D \in S^*$. С индукция по n ще докажем, че ако $D \in S_n$, то $S \overset{r}{\vdash} D$.

1. За $n = 0$, $D \in S_0 = S$ и тогава D е резолютивен извод от S. Следователно $S \overset{r}{\vdash} D$
2. Нека за някое n е в сила $D \in S^* \rightarrow S \overset{r}{\vdash} D$
3. Нека $D \in\ S_{n+1}$. Тогава:
   - $D \in\ S_n$ и от индукционната хипотеза следва, че $S \overset{r}{\vdash} D$

- $D = R_L(D_i, D_j),\ D_1,\ D_2 \in S_n$

Нека α е резолютивен извод на D_1 от S, β е резолютивен извод на D_2 от S. Разглеждаме $\alpha\beta D$ – крайна редица от дизюнкти, резолютивен извод на D от S. Следователно $S \overset{r}{\vdash} D$.

Теорема:

За **коректност** на резолютивната изводимост.

Ако $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$, то S е неизпълнимо.

Доказателство:

Ако $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$, то от предното Твърдение следва, че $\blacksquare \in S^*$, откъдето следва, че S е неизпълнимо.

Теорема:

За **пълнота** на резолютивната изводимост.

Нека S е множество от дизюнкти. Ако S е неизпълнимо, то $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$

Доказателство:

Ще докажем с допускане на противното:

Нека S е неизпълнимо. Да допуснем, че НЕ е изпълнено $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$. Тогава $\blacksquare \notin S^*$. S^* е фамилия от крайни непразни множества. Следователно S^* има минимална трансверзала. Нека A е минимална трансверзала за S^*. A е множество от литерали. Нека P е произволна променлива. Тогава имаме един от следните случаи:

- $P \in A,\ \neg P \notin A$
- $P \notin A,\ \neg P \in A$
- $P \notin A,\ \neg P \notin A$
- $P \in A,\ \neg P \in A$

Да допуснем, че $P \in A,\ \neg P \in A$. От свойствата на минималната трансверзала следва:
Има $D_1 \in S^*$, такова че $A \cap D_1 = \{P\}$.
Има $D_2 \in S^*$, такова че $A \cap D_2 = \{\neg P\}$.
$P \in D_1, \neg P \in D_2$: $R_P(D_1, D_2) = D = (D_1 \backslash \{P\}) \cup (D_2 \backslash \{\neg P\})$.
Но $D \in S^*$ (затворено относно правилото за резолюцията).
$A \cap D = (D_1 \backslash \{P\}) \cup (D_2 \backslash \{\neg P\}) \cap A = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, което е невъзможно.
Оттук получаваме, че следната булева интерпретация I_A:
$I_A[P] = \begin{cases} \text{И} & P \in A \\ \text{Л} & P \notin A \end{cases}$ има свойството: $L \in A \longrightarrow I_A \vDash L$.
Наистина: $L \in A \longrightarrow \begin{cases} L = Q,\ I_A[Q] = \text{И} & \text{т. е.}\ I_A \vDash L \\ L = \neg Q,\ Q \notin A,\ I_A[Q] = \text{Л} & \text{т. е.}\ I_A \vDash L \end{cases}$.

Ще покажем, че I_A е модел за S^*. Нека $D \in S^*$. Тогава има литерал L, такъв че $L \in A \cap D$. Следователно $L \in A$, откъдето $I_A \vDash L$ и $I_A \vDash D$. Следователно $I_A \vDash S^*$, т.е. S^* е изпълнимо. Но S^* е изпълнимо тогава и само тогава когато S е изпълнимо, откъдето достигнахме то противоречие с условието, че S е неизпълнимо. Следователно ако S е неизпълнимо, то $S \overset{r}{\vdash} \blacksquare$.

Метод на резолюцията

Дефиниция:
Един дизюнкт наричаме **Хорнов** ако най-много един от неговите литерали е позитивен:

- $\blacksquare$ е Хорнов дизюнкт.
- $\{p\}$ е Хорнов дизюнкт (факт).
- $\{p, \neg q_1, \dots, \neg q_n\}, n > 0$ е Хорнов дизюнкт (правило).
- $\{\neg q_1, \dots, \neg q_m\}, m > 0$ е Хорнов дизюнкт (цел).

Дефиниция:
Крайно множество от Хорнови дизюнкти, съдържащо само правила и факти, наричаме (Хорнова) **програма**.

Твърдение:
Нека S е множество от Хорнови дизюнкти и $\blacksquare \notin S$.
Ако S е неизпълнимо, то:

1. S съдържа поне един факт.
2. S съдържа поне една цел.

Доказателство:
(1.) Ще докажем с допускане на противното:
Нека S удовлетворява условието и да допуснем, че S не съдържа факти.
Нека $D \in S \to D \neq \emptyset$ е цел или правило и в D има най-много един позитивен литерал.
Тогава съществува q, такава че $\neg q \in D$. Дефинираме булева интерпретация $I_{Л}$, такава че за всяка съждителна променлива p, $I_{Л}[p] = Л$. Тогава за всяка съждителна променлива p имаме: $I_{Л}[p] \vDash \neg p$.
Но в D винаги има поне един непозитивен литерал $\to I_{Л} \vDash D \to I_{Л} \vDash S$, оттук S е изпълнимо, с което достигнахме до противоречие с условието, че S е неизпълнимо.
(2.) Нека S не съдържа цели.
Нека $D \in S, D \neq \emptyset$, е факт или правило, т.е. има поне един позитивен литерал.
Разглеждаме интерпретацията $I_{И}[p] = И$ за всяка променлива p.
Получаваме, че $I_{И} \vDash D \to I_{И} \vDash S$, оттук S е изпълнимо, с което достигнахме до противоречие с условието, че S е неизпълнимо.

Дефиниция:
Нека S е множество от Хорнови дизюнкти и X е непразно множество от модели на S.
Дефинираме следната булева интерпретация: $\boldsymbol{I_X}$, такава че за всяка съждителна променлива p е изпълнено: $I_X[p] = И \leftrightarrow$ за всяка интерпретация $J \in X, J[p] = И$.

Лема:

Нека S е множество от Хорнови дизюнкти и $X \neq \emptyset$ е множество от модели на S.
Тогава $I_X \vDash S$.

Доказателство:

Ако J е булева интерпретация, то на J можем да съпоставим множеството A_J на всички променливи верни в J: $A_J = \{p \mid J[p] = \text{И}\}$.

И обратното – на всяко подмножество от съждителни променливи - A, можем да съпоставим булева интерпретация $J_A[p] = \text{И} \leftrightarrow p \in A$.

За I_X получаваме $I_X[p] = \text{И} \leftrightarrow p \in A_{I_X} \leftrightarrow$ за всяка интерпретация $J \in X, J[p] = \text{И} \leftrightarrow$ за всяка интерпретация $J \in X, p \in A_J \leftrightarrow p \in \bigcap_{J \in X} A_J$. Тоест $A_{I_X} = \bigcap_{J \in X} A_J$. I_X е сечение на интерпретациите от X. Нека $D \in S$. Тогава $D \neq \blacksquare$.

Имаме следните случаи за D:

- $D = \{p\}$ е факт.
  Нека $J \in X$. Тогава $J \vDash S, J \vDash P, J[p] = \text{И} \rightarrow$ за всяко $J \in X$, $J[p] = \text{И} \rightarrow I_X[p] = \text{И}$.
  Следователно $I_X \vDash D$.
- $D = \{\neg q_1, \dots, \neg q_n\}$, $n > 0$ е цел.
  Нека $J \in X$. Тогава J е модел за D. Тогава съществува q_i: $J[q_i] = \text{Л}$.
  Оттук $q_i \notin A_J \rightarrow q_i \notin A_{I_X}$. Следователно $I_X[q_i] = \text{Л}$, т.е. $I_X \vDash D$.
- $D = \{p, \neg q_1, \dots, \neg q_n\}$, $n > 0$ е правило.
  Имаме два случая:
  1. p е вярно във всички модели (аналогично на D- факт) т.е.
     $p \in A_J$, за всяко $J \rightarrow p \in A_{I_X}$, откъдето $I_X \vDash D$.
  2. Съществува модел $J \in X$, за който p не е вярно (аналогично на D- цел)
     Тогава $p \notin A_J \rightarrow$ съществува q_i: $J[q_i] = \text{Л} \rightarrow q_i \notin A_J$. Тогава $q_i \notin A_{I_X}$, откъдето следва, че $I_X[q_i] = \text{Л} \rightarrow I_X \vDash D$.

Дефиниция:

Нека S е множество от Хорнови дизюнкти. Един модел I_m на S се нарича **най-малък* модел** на S, ако за всеки модел I на S е в сила $A_{I_m} \subseteq A_I$. Тоест всеки път когато $I \vDash S$ и p е съждителна променлива е в сила: $I_m[p] = \text{И} \rightarrow I[p] = \text{И}$.

Теорема:

Всяко изпълнимо множество от Хорнови дизюнкти има **най-малък*** модел.

Доказателство:

Нека X е множеството от всички модели на S. Изпълнимостта на S означаваме с $X = \{J \mid J \vDash S\} \neq \emptyset$. Моделът I_X е модел за S (от предходната лема). От дефиницията на I_X имаме, че ако $I_X[p] = \text{И}$, то за всеки модел $J \in X$ е изпълнено $J[p] = \text{И}$, но X е множеството от всички модели за $S \rightarrow$ от $I_X[p] = \text{И}$ получаваме $J[p] = \text{И}$ за всеки модел J на S.

* „най-малък“ е по-строго ограничение от „минимален“. „най-малък“ елемент съществува когато може да се дефинира пълна наредба между елементите на даденото множество, т.е. когато всеки два елемента са сравними. Тогава „най-малък“ елемент се дефинира като елемент по-малък от всички останали. „минимален“ елемент може да има и при липса на пълна наредба – тогава „минимален“ елемент се дефинира като елемент, който е по-малък от всички с които е сравним. Т.е. „минимален“ и „най-малък“ са еквивалентни когато може да се дефинира пълна наредба между елементите на множеството.