Тема 18 Синтаксис и семантика на термовете и формулите на предикатното смятане от I ред. Унификация.

Дефинират се синтактичните понятия терм и формула от даден език на предикатното смятане. Дефинират се понятията унификатор и най-общ унификатор за множество от термове. Формулира се алгоритъм за намиране на най-общ унификатор за крайно множество от термове.
Дава се семантика на термовете и формулите в дадена структура за езика.
Доказва се, че множество от затворени универсални формули има модел точно тогава, когато множеството от частните му случаи е булево изпълнимо.

Език на предикатното смятане от I ред

I Логически символи
- индивидни променливи – Var ; $x_0, x_1, \dots$ – изброимо много
- булеви (съждителни) връзки – $\neg$, &, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$
- квантори
  - за всеобщност – $\forall$
  - за съществуване – $\exists$
- помощни символи – , , (,)
- формално равенство (ако го има в езика) – $\doteq$

II Нелогически символи
- мн-во на индивидните константи – Const
- мн-во на функционалните символи – Func ; ако $f \in Func$ $\#(f)>0$ – орност
- мн-во на предикатните символи – Pred ; $p \in Pred$, $\#(p)>0$

Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от I ред.

def Индуктивна дефиниция за терм:
- индивидните променливи са термове
- индивидните константи са термове
- ако $f \in Func_{\mathcal{L}}$, $\#(f)=n$ и $\tau_1, \dots \tau_n$ са термове, то $f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ също е терм в $\mathcal{L}$

$Var[\tau]$ – мн-вото от индивидните променливи, участващи в терма τ

def Думите от вида $p(\tau_1, \dots, \tau_n)$, където $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, $p \in Pred_{\mathcal{L}}$, $\#(p)=n$ наричаме атомарни формули.
Ако в езика имаме формално равенство, то и $\tau_1 \doteq \tau_2$ също е атомарна формула.

def за предикатна формула
- атомарните формули са предикатни формули
- ако φ и ψ са предикатни формули, то и $\neg\varphi$, $(\varphi \& \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$ и $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ също са предикатни формули
- ако x е индивидна променлива, φ - предикатна формула, то $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ също са предикатни формули.

def Субституция σ е крайно множество от вида $\{x_1/\tau_1, \dots, x_n/\tau_n\}$, където $x_1, \dots, x_n$ са различни индивидни променливи, $\tau_1, \dots, \tau_n$ са термове, като при това за $i = 1, \dots, n$ $x_i \neq \tau_i$

def Нека $E \neq \emptyset$ е множество от термове, а σ е субституция. Казваме, че σ е унификатор за E, ако всеки път когато $\tau_1, \tau_2 \in E$ то $\tau_1\sigma = \tau_2\sigma$, т.е. $E\sigma = \{\tau\sigma \mid \tau \in E\}$ е едноелементно множество.

def Ако за множество от термове съществува унификатор, казваме, че то е унифицируемо

def Нека $E \neq \emptyset$ е множество от термове. Казваме, че субституцията σ е най-общ унификатор за E (НОУ за E) ако:
- σ е унификатор за E
- всеки път когато ξ е унификатор за E съществува субституция η, такава че $\xi = \sigma\eta$

Алгоритъм за намиране на най-общ унификатор за крайно мн-во от термове (алгоритъм на Ербран)

Нека E - крайно мн-во от термове
С $DS(E)$ (т.е. Disagreement Set) бележим мн-вото на най-левите различия на E.
За да определим $DS(E)$ първо трябва да намерим най-лявата позиция, на която не всички елементи от E имат един и същ символ. Подизразите, оставащи от тази позиция до края на под израза образуват $DS(E)$

$|DS(E)| \leq |E|$

Например ако $E = \{ g(\underline{f(g(x,x))}, z),$ $g(\underline{c}, d),$ $g(\underline{x}, f(y)),$ $g(\underline{g(z,x)}, g(u,x))\}$ то $DS(E) = \{f(g(x,x)), c, x, g(z,x)\}$.

Вход на алгоритъма: Крайно непразно мн-во от термове E.

$\sigma_0 = \iota$ (йот – празната субституция), $E_0 = E$, $i = 0$

Докато (истина)

Ако $|E_i| = 1$, то $\sigma = \sigma_0 \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_i$ е НОУ за E → Край

Иначе

Ако няма инд. пром. $x \in DS(E_i\sigma_i)$ и терм $\tau \in DS(E_i\sigma_i)$; $x \notin Var[\tau]$, то

E не е унифицируемо → Край

Иначе избираме пром. $x_{i+1} \in DS(E_i\sigma_i)$, $\tau_{i+1} \in DS(E_i\sigma_i)$; $x \notin Var[\tau_{i+1}]$,

полагаме $\sigma_{i+1} = \{x_{i+1}/\tau_{i+1}\}$, $E_{i+1} = E_i\sigma_i$; i++ → итерираме

На всяка стъпка от алгоритъма елиминираме всички срещания на някоя от променливите в E, а променливите в E са краен брой. Така след краен брой стъпки, или ще намерим НОУ за E или алгоритъмът ще ни съобщи, че E не е унифицируемо.

[illegible]

алгоритъмът ще [illegible]

Ако алгоритъмът приключи със съобщението, че $\psi = \sigma_0 \sigma_1 \ldots, \sigma_n$ е НОУ за E, то е ясно, че ψ е поне унификатор за E. Нека θ е някой унификатор за E. Трябва да покажем, че $\theta = \psi\theta$, като за целта чрез индукция ще докажем, че за всяко i $\theta = \sigma_0 \ldots \sigma_i \theta$.

За $i = 0$ твърдението е в сила.

Нека $\theta = \sigma_0 \ldots \sigma_i \theta$ и $\sigma_{i+1} = \{v/t\}$. Достатъчно е да покажем, че $\sigma_{i+1}\theta = \theta$. Това може да стане като видим, че действията им върху всяка променлива са едни и същи.

Ако $x \neq v$, то $x\sigma_{i+1}\theta$ е същото като $x\theta$

За самото v, $v\sigma_{i+1}\theta = t\theta$. Тъй като θ унифицира $E\sigma_0 \ldots \sigma_i$ и v и t принадлежат на $DS(E\sigma_0 \ldots \sigma_i)$, то θ трябва да унифицира v и t също така, т.е. $t\theta = v\theta$, което трябваше да докажем.

def Нека $\mathcal{L}$ е език на предикатното смятане от I ред (FOL)
<u>Структура</u> за $\mathcal{L}$ наричаме наредената двойка $\mathcal{A} = \langle A, \mathbb{I} \rangle$, където
- $A \neq \emptyset$ - универсум на структурата
- $\mathbb{I}$ - интерпретация, където
  - $\mathbb{I}(c) \in A$ за вс. константа $c \in Const$
  - $\mathbb{I}(p) \subseteq A \times A \times \ldots \times A = A^n$, където $p \in Pred$ и $\#(p) = n$
  - $\mathbb{I}(f) : A^{\#(f)} \to A$, където $f \in Func$

Вместо $\mathbb{I}(x)$ пишем $x^{\mathcal{A}}$

def Нека $\mathcal{L} \in FOL$. Нека $\mathcal{A}$ е структура за $\mathcal{L}$.
<u>Оценка</u> v в $\mathcal{A}$ наричаме изображението $v: Var \to A$ т.е. $v(x) \in A$

def Нека $\mathcal{L} \in FOL$, $\mathcal{A}$ - структура за $\mathcal{L}$ и v - оценка. За вс. терм τ от $\mathcal{L}$ дефинираме ст-т на τ в $\mathcal{A}$ при оценката v. Ако τ е терм ст-та му в стр. $\mathcal{A}$ и оценка v ще се отбелязва с $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[v]$. Дефиницията е индуктивна
- τ - индивидна пром: $\tau = x$: $\|x\|^{\mathcal{A}}[v] \leftrightharpoons v(x)$
- τ - инд. константа : $\tau = c$ - стойността не зависи от оценката, а само от интерпретацията (т.е. от структурата $\mathcal{A}$) : $\|c\|^{\mathcal{A}}[v] \leftrightharpoons c^{\mathcal{A}}$
- τ - функция, приложена към няколко терма - $\tau = f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\#(f) = n$, $f \in Func$ и τ_i са термове, за които $\|\tau_i\|^{\mathcal{A}}[v]$ е дефинирано:
  $\|f(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[v] \leftrightharpoons f^{\mathcal{A}}(\|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v], \ldots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[v])$

Тази дефиниция е коректна, заради еднозначния синтактичен анализ.

<u>Твърдение</u> Нека v_1 и v_2 са оценки на индивидните променливи в стр. $\mathcal{A}$. Нека τ е терм, такъв че $v_1(x) = v_2(x)$ за вс. инд. пром x, която се среща в τ $(x \in Var[\tau])$. Тогава $\|\tau\|^{\mathcal{A}}[v_1] = \|\tau\|^{\mathcal{A}}[v_2]$

def Оценка v, модифицирана в точка x с a :

$$v_a^x[y] = \begin{cases} a, & y = x \\ v(y), & y \neq x \end{cases}$$

def Нека $\mathcal{A}$ - структура, v - оценка в нея, φ - предикатна формула.
Стойност на φ при оценката v отбелязваме с $\|\varphi\|^{\mathcal{A}}[v]$
- $\varphi = p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ - атомарна ф-ла
  $\|p(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|^{\mathcal{A}}[v] \leftrightharpoons \langle \|\tau_1\|^{\mathcal{A}}[v], \ldots, \|\tau_n\|^{\mathcal{A}}[v] \rangle \in p^{\mathcal{A}}$
- $\varphi = \neg\psi$, където ψ е предикатна формула
  $\|\neg\psi\|^{\mathcal{A}}[v] \leftrightharpoons H_{\neg}(\|\psi\|^{\mathcal{A}}[v])$

— $\varphi = (\psi_1 \sigma \psi_2)$, където ψ_1, ψ_2 – пред. ф-ли, а $\sigma \in \{\&, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$\|\psi_1 \sigma \psi_2\|^{A}[v] \leftrightharpoons H_\sigma(\|\psi_1\|^{A}[v], \|\psi_2\|^{A}[v])$

— $\varphi = \forall x \psi$, x – инд. пром., ψ – пред. ф-ла

$\|\forall x \psi\|^{A}[v] \leftrightharpoons$ За вс. елем. $a \in A$ е в сила $\|\psi\|^{A}[v_a^x] = И$

— $\varphi = \exists x \psi$, x – инд. пром., ψ – пред. ф-ла

$\|\exists x \psi\|^{A}[v] \leftrightharpoons$ Съществува елем $a \in A$: $\|\psi\|^{A}[v_a^x] = И$

Твърдение Нека φ – предикатна формула, A – структура, v_1 и v_2 – оценки. Ако $v_1(x) = v_2(x)$ за ~~всички~~ всяка променлива $x \in Var^{free}[\varphi]$, то $\|\varphi\|^{A}[v_1] = \|\varphi\|^{A}[v_2]$

def Казваме, че формула φ е затворена ако $Var^{free}[\varphi] = \emptyset$

def Универсална формула наричаме формула от вида $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$, където φ е безкванторна

def Нека φ е затворена универсална формула: $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi'$ и φ' – безкванторна. Формули от вида $\varphi'[x_1/\tau_1, \dots x_n/\tau_n]$ където $\tau_1, \dots, \tau_n$ са затворени термове, наричаме затворен частен случай на φ. Бележим с $CSi(\varphi)$. Ако $\tau_1, \dots, \tau_n$ не бяха затворени, щяхме да имаме само частни случаи – $Si(\varphi)$.

def Нека $\mathcal{L}$ е език от I ред и има поне една индивидна конст. За една стр. A казваме, че е Ербранова, ако:

- $A = T_{\mathcal{L}}^{cl}$ – затворени термове (ако термовете не са затворени, то структурата е свободна Ербранова структура)
- $c^A = c$
- $f^A(\tau_1, \dots, \tau_n) = f(\tau_1, \dots, \tau_n)$ ($\tau_1, \dots \tau_n$ са затворени термове ако структурата е Ербранова. Ако структурата е свободна Ербранова, то няма ограничение термовете да са затворени)

Твърдение 1 Нека език $\mathcal{L}$ е без формално равенство. Γ е мн-во от затворени универсални формули. Следните са еквивалентни:

1) има свободна ербранова структура, за която $A \models_{id_A} Si(\Gamma)$
2) $Si(\Gamma)$ е булево изпълнимо

Твърдение 2 Ако A е свободна ербранова структура и Γ е мн-во от затворени универсални формули, то

$A \models \Gamma \leftrightarrow A \models_{id_A} Si(\Gamma)$

Теорема Нека Γ е множество от затворени универсални формули. Нека $\mathcal{L}$ е език без формално равенство. Тогава Γ има модел точно тогава, когато $Si(\Gamma)$ е булево изпълнимо.

Доказателство

1) Нека $Si(\Gamma)$ е б.и. От Тв.1 следва, че съществува свободна Ербранова структура $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models_{id_f} Si(\Gamma)$. От Тв.2 получаваме, че $\mathcal{A} \models \Gamma$ т.е. $\mathcal{A}$ е свободен ербранов модел за Γ, т.е. Γ има модел.

2) Нека Γ има модел, т.е. има структура $\mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \Gamma$. Нека v - произволна оценка в $\mathcal{A}$. Ще докажем, че $\mathcal{A} \models_v Si(\Gamma)$

Нека $\theta \in Si(\Gamma)$ е произволна ф-ла. Тогава $\theta = \varphi[x_1/\tau_1, \dots x_n/\tau_n]$ и $\forall x_1 \dots \forall x \varphi = \psi \in \Gamma$ т.е. θ е затв. частен случай на ψ при термове заместващи променливите $x_1, \dots, x_n$.

Избираме n нови променливи, които не се срещат нито в $\{x_1, \dots, x_n\}$ ~~има~~ нито в $\tau_1, \dots, \tau_n$.

Нека ги бележим с $x_1', \dots, x_n'$

Знаем, че за ф-лата $\forall x \varphi$ и допустимата замяна $\varphi[x/\tau]$ е в сила

$\models \forall x \varphi \Rightarrow \varphi[x/\tau]$

Нека за краткост $\varphi' = \varphi[x_1/x_1', x_2/x_2', \dots, x_n/x_n']$. Прилагаме горното многократно:

$\mathcal{A} \models_v \forall x_1' \dots \forall x_n' \varphi'$

$\rightarrow \mathcal{A} \models_v \forall x_2' \dots \forall x_n' \varphi'[x_1'/\tau_1]$

$\rightarrow \mathcal{A} \models_v \forall x_3' \dots \forall x_n' \varphi'[x_1'/\tau_1][x_2'/\tau_2]$

...

$\rightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi'[x_1'/\tau_1][x_2'/\tau_2] \dots [x_n'/\tau_n]$

т.е. $\mathcal{A} \models_v \varphi[x_1/x_1', \dots, x_n/x_n][x_1'/\tau_1] \dots [x_n'/\tau_n]$

$\rightarrow \mathcal{A} \models_v \varphi[x_1/\tau_1, \dots x_n/\tau_n] = \theta$ т.е. $\mathcal{A} \models_v \theta$

Доказахме, че произволна ф-ла от $Si(\Gamma)$ е вярна в $\mathcal{A}$ при произволна оценка v в $\mathcal{A}$, следователно $\mathcal{A} \models_v Si(\Gamma)$ и по Тв1 $Si(\Gamma)$ е булево изпълнимо

<u>Доказателство</u> на Тв. 1 (само скицирано е достатъчно):

1) $\to$ 2) Нека I е булева интерпретация, дефинирана за атомарните формули (те са само от вида $p(\tau_1, \ldots \tau_n)$)

$$I(p(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = И \overset{def}{\longleftrightarrow} A \models_{id_A} p(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

С индукция относно построението на безкванторните ф-ли може да се докаже, че за всяка безкванторна формула ψ

$$I(\psi) = И \leftrightarrow A \models_{id_A} \psi$$

Тъй като за всяко $\psi \in Si(\Gamma)$ ψ е безкванторна и $A \models_{id_A} \psi$ имаме $I(\psi) = И$

С други думи $I \models^{\delta} Si(\Gamma)$

2) $\to$ 1) Нека $I \models^{\delta} Si(\Gamma)$

Дефинираме свободна ербранова структура A_I така:

$$\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle \in p^{A_I} \overset{def}{\longleftrightarrow} I(p(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = И$$

С индукция относно построението на ~~всяка~~ безкванторните формули, доказваме, че за всяка безкванторна формула ψ

$$A \models_{id_A} \psi \leftrightarrow I(\psi) = И$$

Аналогично с горното разсъждение, получаваме, че $A \models_{id_A} Si(\Gamma)$