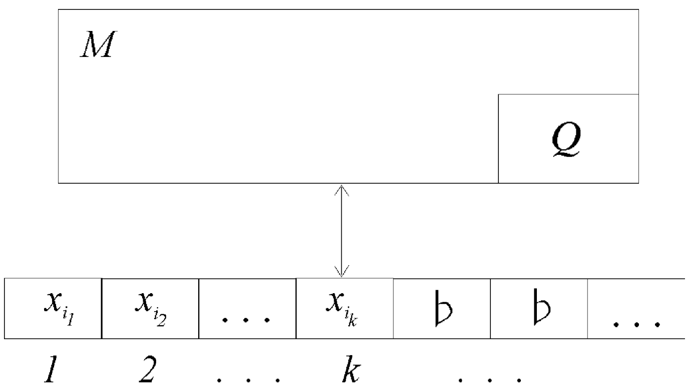
Въпрос 6

Сложност на алгоритъм. Асимптотично поведение на целочислени функции (O-, Ω-, Θ-, o- и ω-нотация). Сложност на рекурсивни програми.

Понятието алгоритъм е неформално. Съществуват много опити за неговото формализиране. Между най-известните от тях са: машина на Тюринг; машина с произволен достъп до паметта; език за програмиране; частично-рекурсивните функции, въведени от Ст. Клини; λ-смятането, въведено от А. Чърч; машините на Пост, въведени от Е. Пост, нормалните алгоритми на Марков , въведени от А. А. Марков и др., но **важно е да се отбележи, че в теоретичен план е доказана еквивалентността на всички известни до днес формални модели**. По същество доказването на еквивалентността на произволни два модела се състои в симулиране на изчисления направени в единия модел с изчисления в другия и обратно. Следователно за изследване с математически апарат на понятието алгоритъм е достатъчно да разгледаме **само един негов формален модел – машина на Тюринг**.

Машина на Тюринг

На схемата е представена схематично абстрактна математическа машина. Тя чете входа си от безкрайно в едната посока (без ограничение на общността сме избрали посоката надясно) запомнящо устройство и записва изхода си на същото устройство, наричано за кратко лента. Входно-изходната лента е разделена на изброимо множество еднотипни клетки, във всяка една, от които може да бъде записана някоя от буквите на крайна (входно-изходна) азбука. Клетките са номерирани (отляво на дясно) с естествените числа $1, 2, \ldots, k, \ldots$ Четенето от лентата и писането на нея се извършва от четящо-пишещо устройство, наричано глава. Главата е подвижна, във всеки момент се намира върху точно една клека на лентата и в края на всеки такт може да се премести върху една клетка наляво (ако не е била на най-лявата клетка), една клетка надясно или да остане на място. Означаваме с L, R и S тези възможности за преместване на главата.

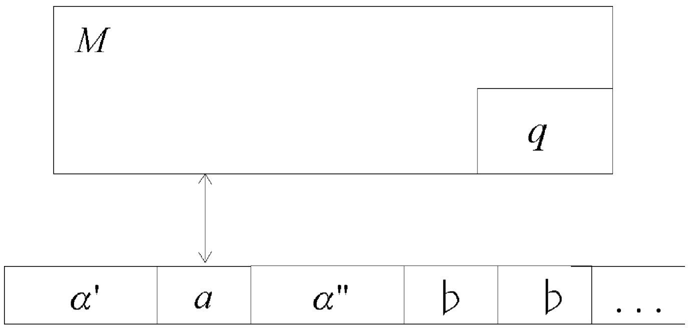


Дефиниция. Петорката $M =< Q, X, q_0, \delta, F >$, където Q е крайно множество от състояния, X е крайна входна азбука, $q_0 \in Q$ е начално състояние, F са заключителни състояния, $F \cap Q = \emptyset$, а $\delta : Q \times X \to (Q \cup F) \times X \times \{L, R, S\}$ е функция на преходите, наричаме машина на Тюринг (МТ) с безкрайна в едната посока лента.

Една от буквите на азбуката X има специално предназначение. Ще я наричаме запълваща буква (или бленк) и я бележим с **ь**. Ще разглеждаме машини на Тюринг с условието, че преди започване на работата, крайно множество от клетки на лентата не съдържат бленк. При това условие, след отработване на краен брой тактове, клетките на лентата, които не съдържат бленкове, ще продължат да бъдат крайно множество.

Дефиниция. Нека k е най-малкото естествено число такова, че всички клетки на лентата на МТ M с номера по-големи или равни на k съдържат бленк. Думата $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k} \in X^*$ такава, че x_{i_j} е записана в клетката с номер j, наричаме текуща лентова дума на M .

Дефиниция. Нека МТ $M =< Q,X,q_0 ,\delta,F >$ е в състояние $q \in Q$, текущата лентова дума е $\alpha' a\alpha'' \in X^*$, а главата на машината се намира над буквата a (виж схемата). Тройката $(\alpha', q, a\alpha'')$ наричаме конфигурация на МТ M. Очевидно, конфигурацията на МТ еднозначно определя бъдещото и поведение. Конфигурациите от вида $(\varepsilon, q_0, \alpha)$ наричаме начални конфигурации.



Ще опишем формално работата на M чрез трансформация на конфигурации.

Дефиниция. Релацията $R_{\vdash} \subseteq (X^* \times Q \times X^*) \times (X^* \times Q \times X^*)$, съставена от наредени двойки конфигурации дефинираме така:
а) $(\alpha' b, q, a\alpha'') \vdash (\alpha', q', ba_0\alpha'')$, ако $\delta(q,a) = (q', a_0, L)$;
б) $(\alpha' b, q, a\alpha'') \vdash (\alpha' ba_0, q', \alpha'')$, ако $\delta(q,a) = (q', a_0, R)$;
в) $(\alpha' b, q, a\alpha'') \vdash (\alpha' b, q', a_0\alpha'')$, ако $\delta(q,a) = (q', a_0, S)$.

С други думи, ако $\delta(q,a) = (q', a_0, m)$, то в края на такта машината на Тюринг записва a_0 на мястото на a, преминава в състояние q' и премества главата на една клетка в ляво, на една клетка в дясно или я оставя на място, ако $m = L$, R или S, съответно. Ако κ_1 и κ_2 са две конфигурации на M , то трансформацията $\kappa_1 \vdash \kappa_2$ наричаме непосредствен преход на κ_1 в κ_2. Казваме още, че κ_1 преминава непосредствено в κ_2.

Дефиниция. Нека $R_{\models} \subseteq (X^* \times Q \times X^*) \times (X^* \times Q \times X^*)$ е рефлексивно и транзитивно затваряне на $R_{\vdash}$. Трансформацията $\kappa' \models \kappa''$ наричаме преход на κ_1 в κ_2. Казваме още, че κ' преминава в κ''. Последователността от непосредствени преминавания $\kappa' \vdash \kappa_1 \vdash \kappa_2 \vdash \ldots \vdash \kappa_r \vdash \kappa''$ наричаме изчисление с машината на Тюринг M .

Естествен начин за завършване на едно изчисление на машината на Тюринг M е, тя да достигне някое от заключителните състояния. В такъв случай, казваме че M спира нормално. Машината може да спре аварийно,когато се намира в конфигурация, за която стойността на δ не е дефинирана, или пък ако машината се опитва да премести главата си вляво от най-лявата клетка на лентата.

Възможно е, за някоя лентова дума α, машината на Тюринг M да не спре работа никога. Например, ако машината се намира в състояние q, главата попадне над клетка, съдържаща буквата a и $\delta(q, a) = (q, a, S)$. В такъв случай казваме, че M зацикля.

Възможни са различни видове изчисления с машини на Тюринг. Ще се спрем на две от тях:

Дефиниция. Нека M е МТ. Нека с α сме означили произволна лентова дума и $\beta = \beta'\beta''$. Тогава функцията $f_M : X^* \to X^*$

$$f_M(\alpha) = \begin{cases} \beta \quad , & \text{ако } (\varepsilon, q_0, \alpha) |= (\beta', q, \beta''), q \in F \\ \text{неопределена}, & \text{ако } M \text{ зацикля или спира аварийно} \end{cases}$$

наричаме *изчислима по Тюринг*

Дефиниция. Нека M е МТ. Нека $F = \{q_y, q_n\}$. Дефинираме език, разпознаван от МТ M като множеството от думи $L_M \subseteq X^*$ такова, че

$$\forall \alpha \in L_M, (\varepsilon, q_0, \alpha) \vDash (\alpha', q_y, \alpha''), \text{а } \forall \beta \notin L_M, (\varepsilon, q_0, \beta) \mid= (\beta', q_n, \beta'').$$

Състоянието q_y наричаме допускащо, а състоянието q_n отхвърлящо. Не е трудно да се трансформира една МТ в еквивалентна на нея със само две заключителни състояния едно допускащо и едно отхвърлящо.

Сложност на алгоритми

Основен ресурс, спрямо който ще изследваме качествата на алгоритмите е времето за работа, но успоредно с това ще обърнем внимание и на количеството използвана памет, като дефинираме понятията сложност на алгоритмите, по отношение на необходимите им време и памет.

Формализацията на понятието размер на входните данни за определен алгоритъм е много сложна задача. Затова ще поставим едно важно условие. Ще поискаме кодирането на екземплярите с думи над избрана азбука да е разумно, т.е. всичко необходимо за решаването на съответната задача да се съдържа в думата, представяща екземпляра и да няма излишък, т.е. такава част от входната дума, че ако я премахнем, същността на екземпляра не се променя.

Нека A е множество от думи над азбуката X, т.е. $A \subseteq X^*$. Ще означаваме дължината на думата $\alpha \in X^*$ с $d(\alpha)$, а с $A_n = \{\alpha | \alpha \in A, d(\alpha) = n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ подмножеството от всички думи на A с дължина n.

Дефиниция. Нека $f_M : A \to X^*$ е тотална изчислима по Тюринг функция. Да означим с $\#_M(\alpha)$ броя на стъпките, които M прави, при работа върху лентовата дума α. Функцията

$$t_M(n) = \max_{\alpha \in A_n} \#_M(\alpha)$$

наричаме сложност по време на M в най-лошия случай , а функцията

$$\tilde{t}_M(n) = \frac{\sum_{\alpha \in A_n} \#_M(\alpha)}{|A_n|}$$

наричаме средна сложност по време на МТ M .

Дефиниция. Нека $f_M : A \to X^*$ е тотална изчислима по Тюринг функция. Да означим с $\&_M(\alpha)$ броя на клетките на лентата, които M използва, при работа върху лентовата дума α. Клетките, в които е разположена самата α винаги включваме в този брой, затова $\&_M(\alpha)$ не може да е по-малко от дължината на α. Функцията

$$s_M(n) = \max_{\alpha \in A_n} \&_M(\alpha)$$

наричаме сложност по памет на M в най-лошия случай , а функцията

$$\tilde{s}_M(n) = \frac{\sum_{\alpha \in A_n} \&_M(\alpha)}{|A_n|}$$

наричаме средна сложност по памет на МТ M.

Тъй като разпознаването на език е частен случай на изчисляване на функция $f_M : \mathrm{A} \to \{\text{true, false}\}$, горните дефиниции са валидни и в този случай.

Асимптотично поведение на целочислени функции

Дефиниция. Нека $\boldsymbol{A}^+$е множеството от целочислени асимптотически положителна функции $\boldsymbol{A}^+ = \{\boldsymbol{f}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} | \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ такова, че за } \forall n \in \mathbb{N} \geq n_0 \text{ следва, че } f(n) > 0\}$.

За улесняване на предстоящото изложение ще приемем за верни следните твърдения: $n, n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; $f(n), g(n)$ и $h(n) \in A^+$;

Дефиниция. Нека $\mathrm{O}(f(\mathrm{n})) \subseteq \boldsymbol{A}^+$ и $\mathrm{O}(f(\mathrm{n})) = \{g(n) | \exists n_0 > 0$ и $\exists c >$ *0 такива, че за* $\forall n \geq n0 \ \ 0 \leq gn \leq cfn$.

Ще казваме, че "$g(n)$ е O от $f(\mathrm{n})$", ако $g(n) \in \mathrm{O}(f(\mathrm{n}))$ и ще бележим с $g(n) = \mathrm{O}(f(\mathrm{n}))$ или това са всички функции, които нарастват НЕ по-бързо от f.

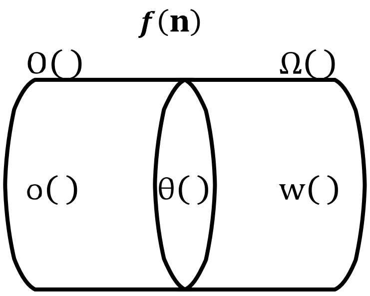
Дефиниция. Нека $\Omega(f(\mathrm{n})) \subseteq \boldsymbol{A}^+$ и $\Omega(f(\mathrm{n})) = \{g(n) | \exists n_0 > 0$ и $\exists c >$ *0 такива, че за* $\forall n \geq n0 \ \ 0 \leq cf\mathrm{n} \leq gn$.

Ще казваме, че "$g(n)$ е Ω от $f(\mathrm{n})$", ако $g(n) \in \Omega(f(\mathrm{n}))$ и ще бележим с $g(n) = \Omega(f(\mathrm{n}))$ или това са всички функции, които нарастват НЕ по-бавно от f.

Дефиниция. Нека $\mathrm{o}(f(\mathrm{n})) \subseteq \boldsymbol{A}^{+}$ и $\mathrm{o}(f(\mathrm{n})) = \{g(n) | \forall c > 0, \exists n_0 >$
0 такива, че за $\forall n \geq n0 \;\; 0 \leq gn < cf\mathrm{n}$.
Ще казваме, че "$g(n)$ е o от $f(\mathrm{n})$", ако $g(n) \in \mathrm{o}(f(\mathrm{n}))$ и ще бележим с $g(n) = \mathrm{o}(f(\mathrm{n}))$ или това са всички функции, които нарастват по-бавно от f.

Дефиниция. Нека $\mathrm{w}(f(\mathrm{n})) \subseteq \boldsymbol{A}^{+}$ и $\mathrm{w}(f(\mathrm{n})) = \{g(n) | \forall c > 0, \exists n_0 >$
0 такива, че за $\forall n \geq n0 \;\; 0 \leq cf\mathrm{n} < gn$.
Ще казваме, че "$g(n)$ е w от $f(\mathrm{n})$", ако $g(n) \in \mathrm{w}(f(\mathrm{n}))$ и ще бележим с $g(n) = \mathrm{w}(f(\mathrm{n}))$ или това са всички функции, които нарастват по-бързо от f.

Дефиниция. Нека $\theta(f(\mathrm{n})) \subseteq \boldsymbol{A}^{+}$ и $\theta(f(\mathrm{n})) = \{g(n) | \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0 >$
0 такива, че за $\forall n \geq n0 \;\; 0 \leq c1f\mathrm{n} \leq gn \leq c2f\mathrm{n}$.
Ще казваме, че "$g(n)$ е θ от $f(\mathrm{n})$", ако $g(n) \in \theta(f(\mathrm{n}))$ и ще бележим с $g(n) = \theta(f(\mathrm{n}))$ или това са всички функции, които нарастват еднакво бързо с f.



$\mathrm{O}(), \Omega(), \mathrm{o}(), \mathrm{w}(), \theta() \subseteq \boldsymbol{A}^{+} \mathrm{x}\, \boldsymbol{A}^{+}$са релации над декартовото произведение на целочислените асимптотически функции. Нека разгледаме техните свойства:

1. **Рефлекцивност** – непосредствено от дефинициите следва, че $\mathrm{O}(), \Omega()$ и $\theta()$ са рефлексивни, а $\mathrm{o}(), \mathrm{w}()$ не са:
   $f(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(f(\mathrm{n}))$;
   $f(\mathrm{n}) = \Omega(f(\mathrm{n}))$;
   $f(\mathrm{n}) = \theta(f(\mathrm{n}))$;
   $f(\mathrm{n}) \neq \mathrm{o}(f(\mathrm{n}))$;
   $f(\mathrm{n}) \neq \mathrm{w}(f(\mathrm{n}))$;

2. **Симетричност** – от дефинициите следва, че само $\theta()$ е симетрична:
   $g(\mathrm{n}) = \theta(f(\mathrm{n})) \Leftrightarrow f(\mathrm{n}) = \theta(\mathrm{g}(\mathrm{n}))$;

   Пример 1:
   Нека $g(\mathrm{n}) = n$ и $f(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^2$, дали $g(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(f(\mathrm{n}))$?

Търсим $n_0 > 0$ и $c > 0$ такива, че за $\forall n \geq n_0$ $0 \leq g(n) \leq cf(\mathrm{n})$ или $0 \leq n \leq c\mathrm{n}^2$, т.е. $0 \leq 1 \leq cn$, което е изпълнено за $c = 1$ и $n_0 = 1$.

Пример 2:
Нека $g(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^2$ и $f(\mathrm{n}) = n$, дали $g(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(f(\mathrm{n}))$?
Търсим $n_0 > 0$ и $c > 0$ такива, че за $\forall n \geq n_0$ $0 \leq g(n) \leq cf(\mathrm{n})$ или $0 \leq \mathrm{n}^2 \leq cn$, т.е. $0 \leq cn \leq 1$ или $0 \leq n \leq \frac{1}{c}$, което при фиксирано c е не е изпълнено за $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,\dots,n_0-1\}$.

Горните два примера показват, че релацията $\mathrm{O}(\,)$ НЕ е симетрична. Аналогично се доказват твърденията и за $\Omega(\,)$, $\mathrm{o}(\,)$, $\mathrm{w}(\,)$.

3. **Транзитивност** – всички релации за транзитивни:

$$f(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(g(\mathrm{n})) \text{ и } g(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(\mathrm{h}(\mathrm{n})) \Rightarrow f(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(h(\mathrm{n}))$$
$$f(\mathrm{n}) = \Omega(g(\mathrm{n})) \text{ и } g(\mathrm{n}) = \Omega(h(\mathrm{n})) \Rightarrow f(\mathrm{n}) = \Omega(h(\mathrm{n}))$$
$$f(\mathrm{n}) = \mathrm{o}(g(\mathrm{n})) \text{ и } g(\mathrm{n}) = \mathrm{o}(\mathrm{h}(\mathrm{n})) \Rightarrow f(\mathrm{n}) = \mathrm{o}(h(\mathrm{n}))$$
$$f(\mathrm{n}) = \mathrm{w}(g(\mathrm{n})) \text{ и } g(\mathrm{n}) = \mathrm{w}(\mathrm{h}(\mathrm{n})) \Rightarrow f(\mathrm{n}) = \mathrm{w}(h(\mathrm{n}))$$
$$f(\mathrm{n}) = \theta(g(\mathrm{n})) \text{ и } g(\mathrm{n}) = \theta(\mathrm{h}(\mathrm{n})) \Rightarrow f(\mathrm{n}) = \theta(h(\mathrm{n}))$$

Доказателство за O( ):
От $f(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(g(\mathrm{n}))$ следва, че $\exists n_0 > 0$ и $\exists c_1 > 0$ такива, че за $\forall n \geq n_0$ $0 \leq f(n) \leq c_1 g(\mathrm{n})$, а от $g(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(\mathrm{h}(\mathrm{n}))$ следва, че $\exists n_1 > 0$ и $\exists c_2 > 0$ такива, че за $\forall n \geq n_1$ $0 \leq g(n) \leq c_2 h(\mathrm{n})$. Нека $n_2 = \max(n_1, n_2)$ и $c = c_1 c_2$, тогава за $\forall n \geq n_2$ $0 \leq f(n) \leq c_1 g(\mathrm{n}) \leq c_1 c_2 h(\mathrm{n})$ или $0 \leq f(n) \leq ch(\mathrm{n}) \Rightarrow f(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(h(\mathrm{n}))$, което е и търсеното твърдение.

Аналогично се доказват твърденията и за $\Omega(\,)$, $\mathrm{o}(\,)$, $\mathrm{w}(\,)$, $\theta(\,)$.

4. **Антисиметричност** – само релациите $\mathrm{o}(\,)$, $\mathrm{w}(\,)$ са антисиметрични, т.е.
Ако $g(n) = \mathrm{o}(f(\mathrm{n})) \Rightarrow f(n) \neq \mathrm{o}(\mathrm{g}(\mathrm{n}))$
Ако $g(n) = \mathrm{w}(f(\mathrm{n})) \Rightarrow f(n) \neq \mathrm{w}(\mathrm{g}(\mathrm{n}))$

Пример 3.
Нека $g(\mathrm{n}) = 2\mathrm{n}^2 + 3n + 5$ и $f(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^2$, дали $g(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(f(\mathrm{n}))$?
Търсим $n_0 > 0$ и $c > 0$ такива, че за $\forall n \geq n_0$ $0 \leq g(n) \leq cf(\mathrm{n})$ или $0 \leq 2\mathrm{n}^2 + 3n + 5 \leq c\mathrm{n}^2$. $0 \leq 2\mathrm{n}^2 + 3n + 5 \leq 2\mathrm{n}^2 + 3\mathrm{n}^2 + 5\mathrm{n}^2 = 10\mathrm{n}^2$. Следователно при $c = 10$ и $n_0 = 1$ за $\forall n \geq n_0$ $0 \leq g(n) \leq cf(\mathrm{n})$, което доказва търсеното твърдение.

Пример 4.
Нека $g(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^2$ и $f(\mathrm{n}) = 2\mathrm{n}^2 + 3n + 5$, дали $g(\mathrm{n}) = \mathrm{O}(f(\mathrm{n}))$?
Търсим $n_0 > 0$ и $c > 0$ такива, че за $\forall n \geq n_0$ $0 \leq g(n) \leq cf(\mathrm{n})$ или $0 \leq \mathrm{n}^2 \leq c(2\mathrm{n}^2 + 3n + 5)$ или $0 \leq 1 \leq (2c-1)\mathrm{n}^2 + 3c\mathrm{n} + 5c$. Следователно при $c = 1$ и $n_0 = 1$ за $\forall n \geq n_0$ $0 \leq g(n) \leq cf(\mathrm{n})$, което

доказва търсеното твърдение.

Горните два примера показват, че релацията $O(\,)$ НЕ е антисиметрична. Аналогично се доказват твърденията и за $\Omega(\,)$, $\theta(\,)$.

Релацията $\theta(\,)$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна, което означава, че тя е еквивалентност и разбива множеството от асимптотически положителните функции на класове на еквивалентност.

Теорема без доказателство:

В подредбата създадена от релацията еквивалентоност - $\theta(\,)$ $g(\mathrm{n})$ ще предхожда $f(\mathrm{n})$, ако $g(\mathrm{n}) = O(\,f(\mathrm{n}))$, но $\mathrm{g(n)} \neq \theta(\mathrm{f(n)})$;

Лема 1 без доказателство:

Ако $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\mathrm{n})}{g(\mathrm{n})} = 0$, то $f(\mathrm{n}) = \mathrm{o}(\mathrm{g(n)})$;

Лема 2 без доказателство:

Ако $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\mathrm{n})}{g(\mathrm{n})} = \infty$, то $f(\mathrm{n}) = w(\mathrm{g(n)})$;

Лема 3 без доказателство:

Ако $\lim_{n\to\infty}\frac{f(\mathrm{n})}{g(\mathrm{n})} = c \neq 0$, то $f(\mathrm{n}) = \theta(\mathrm{g(n)})$;

Задачи за подготовка:

Зад. 1. Нека $g(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^2 - 12n + 33$ и $f(\mathrm{n}) = \mathrm{n}^2$ докажете, че $g(\mathrm{n}) = O(\,f(\mathrm{n}))$?

Отг. $n_0 = 3, c_1 = {}^1\!/_2, c_2 = 1$

Зад. 2. Подредете функциите по тяхната степен на растеж $n\log\sqrt{\mathrm{n}}$, $\log\mathrm{n}^2$, $\sqrt{\mathrm{n}}\log n$?

Отг. $\log\mathrm{n}^2 < \sqrt{\mathrm{n}}\log n < n\log\sqrt{\mathrm{n}}$.

Зад. 3. Намерете, колкото се може по-точно съотношение на растеж на зададените функции:

A) $\sqrt{\mathrm{n}}\ \ vs.\ \ n^{\sin\mathrm{n}}$ – неопределено;

B) $2^n\ \ vs.\ \ 2^{n/2}$ – $\mathrm{w}(\,)$;

C) $\log n!\ \ vs.\ \ \log\mathrm{n}^{\mathrm{n}}$ – $\theta(\,)$.

Зад. 4. Нека $g(\mathrm{n}) = n(\sqrt[n]{n} - 1)$ и $f(\mathrm{n}) = \log n$ докажете, че $g(\mathrm{n}) = \theta(\,f(\mathrm{n}))$?

Рекурентни отношения

Дефиниция. Нека $f(x)$ е функция, $f(x)$ е мултипликативна, ако

$$f(x * y) = f(x) * f(y)$$

Теорема. Нека е зададено рекурентното отношение от вида

$$\begin{cases} t(n) = at\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) \\ t(1) = c, \qquad n \leq 1 \end{cases}$$

(задача с размер на входа n се разпада (разбива) до a задачи от същия вид с размер $\frac{n}{b}$), където $d(n)$ е мултипликативна функция зависеща от n, а $a, b \geq 1$ то:

1. Ако $a = d(b)$, то $t(n) = O\left(\log_b n\, n^{\log_b a}\right)$;
2.1 Ако $a > d(b)$, то $t(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$;
2.2 *Ако* $a < d(b)$, то $t(n) = O\left(n^{\log_b d(b)}\right)$.

Доказателство:

За решаването на зададеното рекурентно отношение прилагаме стандартна итерационна техника:

$$t(n) = \cancel{at}\left(\frac{n}{b}\right) + d(n) \qquad * \ a^0 \quad +$$

$$\cancel{t}\left(\frac{n}{b}\right) = \cancel{at}\left(\frac{n}{b^2}\right) + d\left(\frac{n}{b}\right) \qquad * \ a^1 \quad +$$

$$\cancel{t}\left(\frac{n}{b^2}\right) = \cancel{at}\left(\frac{n}{b^3}\right) + d\left(\frac{n}{b^2}\right) \qquad * \ a^2 \quad +$$

… …

$$\cancel{t}\left(\frac{n}{b^{k-1}}\right) = \cancel{at}\left(\frac{n}{b^k}\right) + d\left(\frac{n}{b^{k-1}}\right), \frac{n}{b^k} \leq 1 \qquad * \ a^{k-1} \quad +$$

$$\cancel{t}\left(\frac{n}{b^k}\right) = c \qquad * \ a^k$$

След привеждане получаваме:

$$t(n) = \mathrm{a}^0 d(n) + \mathrm{a}^1 d\left(\frac{n}{b}\right) + \mathrm{a}^2 d\left(\frac{n}{b^2}\right) + \cdots + \mathrm{a}^{\kappa-1} d\left(\frac{n}{b^{\kappa-1}}\right) + \mathrm{a}^{\kappa} c.$$ или

$$t(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^i d\left(\frac{n}{b^i}\right) + \mathrm{a}^{\kappa} c$$

От това, че $d(n)$ е мултипликативна, следва

$$t(n) = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^i d\left(\frac{n}{b^i}\right) + \mathrm{a}^\kappa c \le \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^i d\left(\frac{b^\kappa}{b^i}\right) + \mathrm{a}^\kappa c = ,$$

$\frac{n}{b^k} \le 1$ или $n \le b^k$, приемаме най-лошият случай, че $n = b^k$ и $\mathrm{k} = \log_b n$, следователно

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^i d\left(b^{k-i}\right) + \mathrm{a}^\kappa c = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^i d(b)^{k-i} + \mathrm{a}^\kappa c$$

1 случай. *Ако* $a = d(b)$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^i d(b)^{k-i} + \mathrm{a}^\kappa c = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^k + \mathrm{a}^\kappa c = k\mathrm{a}^k + \mathrm{a}^\kappa c = (k+c)\mathrm{a}^\kappa = (\log_b n + c)\,\mathrm{a}^{\log_b n} \Rightarrow$$

$$t(n) = \mathrm{O}\left(\log_b n\, \mathrm{a}^{\log_b n}\right) = \mathrm{O}\left(\log_b n\, n^{\log_b a}\right)$$

2 случай. *Ако* $a \ne d(b)$

$$\sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{a}^i d(b)^{k-i} + \mathrm{a}^\kappa c = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\mathrm{a}^i d(b)^k}{d(b)^i} + \mathrm{a}^\kappa c = d(b)^k \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{a}{d(b)}\right)^i + \mathrm{a}^\kappa c =$$

$$= d(b)^k \frac{\left(\frac{a}{d(b)}\right)^k - 1}{\frac{a}{d(b)} - 1} + \mathrm{a}^\kappa c = \frac{\mathrm{a}^k - d(b)^k}{\frac{a}{d(b)} - 1} + \mathrm{a}^\kappa c, \qquad \text{имаме} \frac{1}{\frac{a}{d(b)} - 1} = T\ const$$

$$= T(\mathrm{a}^k - d(b)^k) + \mathrm{a}^\kappa c = (T + c)\mathrm{a}^\kappa - T d(b)^k$$

2.1 случай. *Ако* $a > d(b) \Rightarrow T > 0, t(n) = \mathrm{O}(\mathrm{a}^k) = \mathrm{O}\left(\mathrm{a}^{\log_b n}\right) = \mathrm{O}\left(n^{\log_b a}\right)$

2.2 случай. *Ако* $a < d(b) \Rightarrow T < 0, t(n) = \mathrm{O}(d(b)^k) = \mathrm{O}\left(d(b)^{\log_b n}\right) = \mathrm{O}\left(n^{\log_b d(b)}\right)$

Задачи за подготовка:

Теорема без доказателство – Master Theorem.

Нека е зададено рекурентното отношение от вида

$$\left| \begin{array}{l} t(n) = at\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) \\ \quad t(1) = c,\ n \le 1 \end{array} \right. ,$$

където $a, b \ge 1$ то:

1. Ако $f(\mathrm{n}) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right), \varepsilon > 0$, то $t(n) = O\left(n^{\log_b a}\right)$;
2. Ако $f(\mathrm{n}) = \theta\left(n^{\log_b a}\right)$, то $t(n) = O\left(n^{\log_b a} \log n\right)$;
3. . Ако $f(\mathrm{n}) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right), \exists n_0 > 0$ и $\exists c_1 < 1$ такива, че за $\forall n \geq n_0$ $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq c_1 f(\mathrm{n})$, то $t(n) = \theta(f(\mathrm{n}))$.

Зад. 1. $\mathrm{T}(1) = \theta(1), \mathrm{T}(n) = 2\mathrm{T}\left({}^{n}/_{4}\right) + \sqrt{n}$ за $n > 1$;

$\mathrm{T}(1) = \theta(1), \mathrm{T}(n) = \mathrm{T}\left({}^{n}/_{2}\right) + \log n$ за $n > 1$;

Отг. $O\left(\sqrt{n} \log_4 n\right)$, $O\left((\log_2 n)^2\right)$

Зад. 2. Да се докаже, че $\mathrm{T}(n) = 2\mathrm{T}\left({}^{n}/_{2} + 17\right) + n = O(\mathrm{n} \log \mathrm{n})$ – директно по деф.

Зад. 3. $\mathrm{T}(1) = \theta(1), \mathrm{T}(n) = 2\mathrm{T}\left(\sqrt{n}\right) + 1$

Отг. $\mathrm{T}(n) = O(\log \mathrm{n} * \log(\log \mathrm{n})$, субституция $n = 2^m, \sqrt{\mathrm{n}} = 2^{m/2}$

Зад. 4. $\mathrm{T}(1) = \theta(1), \mathrm{T}(n) = 3\mathrm{T}\left({}^{n}/_{4}\right) + n \log n$

Отг. $\mathrm{T}(n) = O(n \log n)$, Master Theorem.