3. Булеви функции. Пълнота. Съкратена ДНФ на БФ.

Дефиниция: Функциите $F_2 = \{f : J_2^n \to J_2 \mid n = 1, 2, \ldots\}$ наричаме **булеви (двоични)**. Булевите функции на n променливи означаваме с F_2^n

Нека F = { f_0, f_1, …} $\subseteq$ **F_2**. Нека X = { f, x, 0, 1, (,), <запетая> }.

По-нататък ще записваме думите $f\alpha$, $x\beta$, където α, $\beta \in$ { 0, 1}$^+$ като f_i, x_j, където α е двоичното представяне на числото i, β е двоичното представяне на числото j.

Дефиниция: Дефинираме индуктивно понятието **формула над множеството от функции** F:

База: За всяка функция $f_i \in$ F на n променливи, думата f_i (x_1, x_2, …, x_n) $\in$ X* е формула над F.

Предположение: Нека $f_i \in$ F е функция на n променливи и φ_1, φ_2, …, $\varphi_n \in$ X* са формули над F или променливи, т.е. от вида x_k.

Стъпка: Тогава думата f_i (φ_1, φ_2, …, φ_n) $\in$ X* е формула над F.

БФ с една променлива са 4 и са представени в следната таблица:

x	f_0	f_1	f_2	f_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Имената на функциите са както следва:

- f_0 (x) – константата нула; означаваме я с $\tilde{0}$
- f_3 (x) – константата единица; означаваме я с $\tilde{1}$
- f_1 (x) = x – идентитет
- f_2 (x) = $\overline{x}$ - отрицание на x

БФ с две променливи са 16 и са представени в следната таблица:

x	y	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Имената на функциите са както следва:

- f_0 (x, y) – константата нула, означаваме я с $\tilde{0}$. Приемаме същото означение, тъй като разликата е само в броя на променливите, а самата функция не зависи от тези променливи
- f_{15} (x, y) – константата единица, означаваме я с $\tilde{1}$
- f_3 (x, y) = x – идентитетът (не зависи от y)
- f_5 (x, y) = y – идентитетът (не зависи от x)
- f_{12} (x, y) = $\overline{x}$ - отрицанието на x (не зависи от y)
- f_{10} (x, y) = $\overline{y}$ - отрицанието на y (не зависи от x)

Следващите функции от F_2^2 съществено зависят и от двете променливи; ще ги означаваме както следва:

- f_1 (x, y) = $x \wedge y$ = xy – конюнкция на x и y; функцията можем да разглеждаме като умножение по модул 2;
- f_7 (x, y) = $x \vee y$ – дизюнкция на x и y;
- f_6 (x, y) = $x \oplus y$ – събиране по модул 2;
- f_9 (x, y) = $x \equiv y$ – еквивалентност на x и y;
- f_{13} (x, y) = $x \rightarrow y$ – импликация от x към y;
- f_{11} (x, y) = $y \rightarrow x$ – импликация от y към x;
- f_{14} (x, y) = $x|y$ – функция на Шефер;
- f_8 (x, y) = $x \downarrow y$ – функция (стрелка) на Пирс;

Свойства:

Комутативност - $xy = yx$, $x \vee y = y \vee x$, $x \oplus y = y \oplus x$

Асоциативност - $(xy)z = x(yz)$, $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

Дистрибутивност - $x (y \vee z) = xy \vee xz$, $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$, $x (y \oplus z) = xy \oplus xz$

Идемпотентност - $x \vee x = x$, $xx = x$, $x \oplus x = \tilde{0}$

Свойства на отрицанието - $x\overline{x} = \tilde{0}$, $x \vee \overline{x} = \tilde{1}$, $x \oplus x = \tilde{1}$

Свойства на константите - $x\tilde{0} = \tilde{0}$, $x\tilde{1} = x$, $x \vee \tilde{0} = x$, $x \vee \tilde{1} = \tilde{1}$, $x \oplus \tilde{0} = x$, $x \oplus \tilde{1} = \overline{x}$

Закон за двойното отрицание - $\overline{\overline{x}} = x$

Закони на Де Морган - $\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$, $\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

Всяко едно от тези свойства може да се провери като директно сравним стълбовете на функциите отговарящи на двете формули. Ще използваме тези свойства за да покажем още две:

Слепване - нека $f \in F_2$; Тогава е в сила: $f x \vee f \overline{x} = f (x \vee \overline{x}) = f \tilde{1} = f$

Поглъщане - нека $f \in F_2$; Тогава е в сила: $fg \vee f = fg \vee f \tilde{1} = f (g \vee \tilde{1}) = f \tilde{1} = f$

Дефиниция: С [F] ще означаваме множеството от всички двоични функции, съпоставени на формулите над F и ще го наричаме **затваряне** на F (относно суперпозицията).

Дефиниция: Множеството от функции $F \subseteq \mathbf{F_2}$ е **пълно** в $\mathbf{F_2}$, ако $[F] = \mathbf{F_2}$.

Дефиниция: Двоичната функция $f(x, \sigma) = x^{\sigma}$ дефинираме така: $x^{\sigma} = x$, ако $\sigma = 1$ и $x^{\sigma} = \overline{x}$, ако $\sigma = 0$.

Лема1: $x^{\sigma} = 1 \Leftrightarrow x = \sigma$.

Доказателство: Достатъчно е да пресметнем стълба на x^{σ} и да видим, че $x^{\sigma} = x \equiv \sigma$, което доказва твърдението.

Дефиниция: Формули от вида $x_{i_1}{}^{\sigma_1} x_{i_2}{}^{\sigma_2} \dots x_{i_k}{}^{\sigma_k}$, където $I_j \neq i_s$ при $j \neq s$, $\sigma_j \in \{0, 1\}$, наричаме **елементарни конюнкции**.

Теорема (Разбиване на БФ по част от променливите): Нека са избрани i, $1 \leq i \leq n$ от променливите на функцията $f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{F_2}$. Без ограничение на общността, нека това са първите i променливи. Тогава

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\forall \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_i^{\sigma_i} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Доказателство: Нека $g(x_1, \dots, x_n)$ е функцията определена от дясната част на равенството. Да пресметнем стойностите на функциите f и g за произволен вектор $(a_1, \dots, a_n) \in J_2^n$. Вляво получаваме $f(a_1, \dots, a_n)$. От Лема1 следва, че от всички 2^i елементарни конюнкции $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_i^{\sigma_i}$, участващи в дясната част, само една има значение 1 – тази при която $\sigma_j = a_j$, $j = 1,2,\dots,i$. Останалите елементарни конюнкции имат стойност 0 и анулират съответните членове на многократната дизюнкция. Така за стойността на дясната част получаваме:

$$g(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^{a_1} a_2^{a_2} \dots a_i^{a_i} f(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \cup \tilde{0} =$$
$$= \tilde{1} f(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Следователно функциите от двете части на равенството съвпадат.

Теорема (Бул): Множеството $\{ x \vee y, xy, \overline{x} \}$ е пълно.

Доказателство: Ако $f = \tilde{0}$, можем да представим $f = x\overline{x}$ и тогава $f \in [\{ x \vee y, xy, \overline{x} \}]$.

Нека $f \neq \tilde{0}$. Тогава разлагаме $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по всичките n променливи и получаваме

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \bigvee_{\forall \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

Ако $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 0$, съответният член в дясната част се анулира и може да не участва във формулата. Ако $f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = 1$, то $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$.Така получаваме: f (x_1, x_2, …, x_n) = $\bigvee_{\substack{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n \in \mathbf{J}_2^n \\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$, което е формула над { $x \vee y$, xy, $\overline{x}$ }.

В означенията на доказателството, когато $f \neq \tilde{0}$, формулата се нарича **съвършена дизюнктивна нормална форма** на f.

Дефиниция за импликанта и проста импликанта на БФ. Формулировка и доказателство на теоремата за премахване на букви от елементарна конюнкция.

Дефиниция: Нека $f \in F_2^n$ и $N_f = \{ \alpha \mid \alpha \in J_2^n, f(\alpha) = 1 \}$ тогава N_f наричаме **единично множество** на функцията f.

Лема: $N_{f \vee g} = N_f \cup N_g$, $N_{fg} = N_f \cap N_g$.

Теорема (За единичните множества на ел. Конюнкции и съдържащите се в тях букви) Нека K и K′ са елементарни конюнкции на n променливи. $N_K \subseteq N_{K'} \Leftrightarrow$ K = K′K″ т.е. всички букви на K′ се съдържат в K и то със същите степени.

Доказателство:

1) Нека K = K′K″. Тогава $N_K = N_{K'K''} = N_{K'} \cap N_{K''} \Rightarrow N_K \subseteq N_{K'}$
2) Нека $N_K \subseteq N_{K'}$.
    a. Ще покажем, че всяка буква, която участва в K и K′ има една и съща степен. Да допуснем противното, т.е. $K = x^{\sigma}K_1$, $K' = x^{\bar{\sigma}}K_1'$.

       Тогава $N_K \cap N_{K'} = N_{KK'} = N_{x^{\sigma}x^{\bar{\sigma}}K_1K_1'} = \varnothing \Rightarrow N_K = \varnothing$ - противоречие.
    b. Да допуснем, че съществува буква y, която участва в K′, но не участва в K. Нека K = $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_k^{\sigma_k}$, K′ = $y^{\sigma}K_1'$ и $y \neq x_j$. Построяваме вектор α, така че $x_1 = \sigma_1$, …, $x_k = \sigma_k$, y = $\bar{\sigma}$, а останалите променливи са произволни. Тогава K (α) = 1 и K′ (α) = 0, т.е. $\alpha \in N_K$ и $\alpha \notin N_{K'}$ - противоречие.

   От a, b => Всички букви на K′ се съдържат в K и то със същите степени.

Дефиниция: Нека $f \in \mathbf{F_2}$. Елементарната конюнкция K наричаме **импликанта** на f, ако $N_K \subseteq N_f$. Лесно може да се покаже, че ако K е импликанта на f, то $(K \rightarrow f) = \tilde{1}$, откъдето и наименованието импликанта.

Дефиниция: Импликантата K наричаме **проста**, ако не съществува импликанта K′ такава, че $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$. От горната теорема това означава, че ако премахнем коя да е буква на K ще получим елементарна конюнкция, която не е импликанта на f.

Очевидно е, че във всяка дизюнктивна нормална форма на f участват елементарни конюнкции, които са импликанти на f.

Лема: За всяка импликанта K на $f \in$ **F_2** съществува проста импликанта K′ на f, така че $N_K \subset N_{K'}$

Доказателство: ще опишем алгоритъм за построяване на K′ от K:

1. Ако K е проста, то K′ = K, край
2. Ако K не е проста, премахваме някоя от буквите на K и преминаваме към 1.

Очевидно алгоритъмът ще приключи изпълнението си след краен брой стъпки, тъй като K има краен брой букви, на всяка стъпка премахваме буква и всяка импликанта на f с една буква очевидно е проста.

Съкратена дизюнктивна нормална форма на БФ – дефиниция и съответни теореми (без доказателство).

Дефиниция: Нека φ е формула над $F \subseteq$ **F_2**. Под **сложност** на φ ще разбираме броя на срещанията на букви на променливи във φ. Например: формулата $xyz \vee x\bar{y}\bar{z}$ има сложност 6.

Дефиниция: Под **минимална дизюнктивна нормална форма** на функцията $f \in$ **F_2** ще разбираме дизюнктивна нормална форма на f с минимална сложност.

Теорема: Всяка минимална дизюнктивна нормална форма на функцията $f \in$ **F_2** се състои само от прости импликанти.

Теорема: Нека $K_1, K_2, \ldots, K_r$ са всички прости импликанти на $f \in$ **F_2**, тогава $D = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_r$ е дизюнктивна нормална форма на f.

Дефиниция: Дизюнктивната нормална форма от всички прости импликанти на функцията $f \in$ **F_2** наричаме **съкратена дизюнктивна нормална форма** на f.

Алгоритъм на Куайн-МакКласки за построяване на СъкрДНФ (с доказателство на коректността).

Лема: ако xK и $\bar{x}K$ са импликанти на $f \in$ **F_2**, то те не са прости;

Доказателство: От свойството слепване имаме, че $xK \vee \bar{x}K = K$.

Имаме $N_K = N_{xK \vee \bar{x}K} = N_{xK} \cup N_{\bar{x}K} \subseteq N_f$; също от $N_{xK} \cup N_{\bar{x}K} \subseteq N_K$ имаме $N_{xK} \subset N_K, N_{\bar{x}K} \subset N_K$, така че xK и $\bar{x}K$ не са прости импликанти на f. Междувременно показахме, че ако xK и $\bar{x}K$ са импликанти на f, то K също е импликанта на f.

Алгоритъм на Куайн-МакКласки:

Нека f $(x_1, \dots, x_n) \in$ $\mathbf{F_2}^n$. Ще опишем алгоритъм за построяване на съкратената дизюнктивна нормална форма на f. За целта строим таблица на Куайн-МакКласки за f. Колоните на таблицата са номерирани с (n), (n-1), …, (r), като в началото броят им е неопределен, т.е. r се определя от алгоритъма.

1. В колоната (n) записваме всички импликанти на f, които участват в съвършената дизюнктивна нормална форма на f. Нека i = n.

2. Строим колоната (i - 1) по следния начин - за всяка двойка импликанти K_1, K_2 от колона (i), такива, че K_1 = xK и K_2 = $\bar{x}K$:
   a. Отбелязваме K_1 и K_2 в колоната (i)
   b. В колоната (i - 1) записваме K

3. Ако в колоната (i - 1) има поне една импликанта, то нека I = I – 1 и преминаваме към 2. В противен случай – край, като r = i.

Теорема (Куайн-МакКласки): Всички неотбелязани елементарни конюнкции в таблицата на Куайн-МакКласки и само те са простите импликанти на f.

Доказателство:

Стъпка 1: Ще покажем, че всяка импликанта на f е в таблицата. Нещо повече, ще покажем, че колоната (i) съдържа всички импликанти на f с i букви и само те.

С индукция по i ще покажем, че колоната (i) съдържа всички импликанти на f с i букви.

База: При i = n всички импликанти на f с n букви и само те участват в съвършената дизюнктивна нормална форма на f, от която построихме колоната (n).

Предположение: Нека твърдението е изпълнено при i = k ≤ n, т.е. колоната (k) съдържа всички импликанти на f с k букви и само те.

Стъпка: Да допуснем, че в колоната (k-1) липсва импликанта K на f с k – 1 < n букви. Нека x е буква, която не участва в K, тогава xK и $\bar{x}K$ са импликанти на f с k букви и по индукционното предположение те участват в колоната (k). Това е противоречие, тъй като алгоритъмът на Куайн-МакКласки в този случай ще слепи xK и $\bar{x}K$ и ще постави K в колоната (k-1). Така всяка импликанта на f с (k-1) букви участва в колоната (k-1).

Заключение: За i = n, n-1, …, r колоната (i) съдържа всички импликанти на f с i букви.

В колоната (i) има само импликанти на f с i букви (това твърдение Манев каза, че не е необходимо да се доказва).

Стъпка 2: Всяка отбелязана импликанта K на f не е проста. Действително, по алгоритъма K има вида $K = x^{\sigma}K_1$ и освен това $K' = x^{\bar{\sigma}}K_1$ е импликанта на f в същата колона. По горната лема K не е проста.

Стъпка 3: Всяка неотбелязана импликанта K на f е проста.

Да допуснем противното, т.е. неотбелязаната импликанта K на f с m букви не е проста. Тогава съществува буква x такава, че $K = x^{\sigma}K_1$ и K_1 е импликанта на f с m-1 букви; тъй като K_1 е импликанта на f, то $K' = x^{\bar{\sigma}}K_1$ (в K′ степента на x трябва да е
σ +1) е импликанта на f с m букви; при това положение алгоритъмът би отбелязал K и K′, което е противоречие.

Пример: (n = 4) нека

$$f = \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,y\,z\,\bar{t} \vee \bar{x}\,y\,z\,t \vee x\,y\,\bar{z}\,t \vee x\,y\,z\,t\,;$$

Образуваме таблицата на Куайн-МакКласки, като елементарните конюнкции в колоната (4) сортираме по брой отрицания; това е удобно, тъй като слепването се извършва върху елементарни конюнкции, които се различават точно с 1 по брой отрицания;

С * са отбелязаните елементарни конюнкции от алгоритъма.

(4)	(3)	(2)
$\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t}$ *	$\bar{x}\bar{y}\bar{t}$ *	$\bar{y}\bar{t}$
$\bar{x}\bar{y}z\bar{t}$ *	$\bar{y}\bar{z}\bar{t}$ *	
$x\bar{y}\bar{z}\bar{t}$ *	$\bar{y}z\bar{t}$ *	
$x\bar{y}z\bar{t}$ *	$\bar{x}z\bar{t}$	
$x\bar{y}\bar{z}t$ *	$x\bar{y}\bar{t}$ *	
$\bar{x}yz\bar{t}$ *	$x\bar{y}\bar{z}$	
$\bar{x}yzt$ *	$x\bar{z}t$	
$xy\bar{z}t$ *	$\bar{x}yz$	

$x\,y\,z\,t$ *	$y\,z\,t$	
	$x\,y\,t$	

Така съкратената дизюнктивна нормална форма на f е:

$$f = \bar{x}\,z\,\bar{t} \vee x\,\bar{y}\,\bar{z} \vee x\,\bar{z}\,t \vee \bar{x}\,y\,z \vee y\,z\,t \vee x\,y\,t \vee \bar{y}\,\bar{t}$$