1. Основни комбинаторни принципи и формули. Рекурентни отношения.

Основни принципи на изброителната комбинаторика.

Теорема (принцип на Дирихле): Нека A и B са крайни множества, $|A| = m$, $|B| = n$, $m > n$. Тогава за всяка тотална функция $f: A \to B$ съществуват $a_i \neq a_j \in A$ такива, че
$f(a_i) = f(a_j)$.

Теорема (принцип на биекцията): Нека X и Y са крайни множества, $|X| = n$, $|Y| = m$. Тогава съществува биекция $f: X \to Y \Leftrightarrow m = n$.

Доказателство: Нека $m = n$; тогава можем да напишем $X = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$, $Y = \{ b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ и да дефинираме естествената биекция $f(a_i) = b_i$ за всяко $i \in \mathbf{I_n}$.

Нека съществува биекция $f: X \to Y$; ако допуснем, че $m > n$, то по принципа на Дирихле => съществуват $a, b \in X$, $a \neq b$ такива, че $f(a) = f(b)$ – противоречие с еднозначността на биекцията f.

Аналогично, ако допуснем $n < m$ ще достигнем до противоречие с еднозначността на биекцията f^{-1} и така $m = n$.

Теорема (принцип на събирането): Нека A е крайно множество, а $R = \{ S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ е разбиване на A. Тогава $|A| = \sum_{i=1}^{k} |S_i|$.

Теорема (принцип за изваждането): Нека A е крайно множество, $A' \subseteq A$, $A'' \subseteq A$, $A \backslash A' = A''$. Тогава $|A'| = |A| - |A''|$;

Теорема (принцип на умножението): Нека A и B са крайни множества, $|A| = n$, $|B| = m$. Тогава $|A \times B| = |A|.|B| = n.m$;

Доказателство:
Ако $n = 0$, то $A = \varnothing$ => $A \times B = \varnothing$ => $|A \times B| = 0 = m.0$;
Ако $m = 0$, то $B = \varnothing$ => $A \times B = \varnothing$ => $|A \times B| = 0 = 0.n$;
Нека $m \neq 0$, $n \neq 0$, $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.
Нека за всяко $a_k \in A$ дефинираме $S_k = \{ (a_k, b) \mid b \in B\}$ и нека $R = \{ S_1, S_2, \ldots, S_n\}$.
От очевидната биекция $f: A \to R$, $f(a_i) = S_i$ => $|R| = n$.
За всяко S_k дефинираме биекцията g_k: $Sk \to B$, $g_k((a_k, b)) = b$.
Тогава за всяко S_i имаме $|S_i| = |B| = m$.
От друга страна R е разбиване на A x B защото:

1. За всяко $k \in \mathbf{I_n}$, имаме $|S_k| = m \neq 0$ => $S_k \neq \varnothing$
2. За всеки $i, j \in \mathbf{I_n}$ от $i \neq j$ => $a_i \neq a_j$ => $S_i \cap S_j = \varnothing$
3. $A \times B = \bigcup_{k \in \mathbf{I_n}} S_k$

От принципа за събирането получаваме: $|A \times B| = \sum_{i \in \mathbf{I_n}} |S_i| = \sum_{i \in \mathbf{I_n}} m = n.m = |A|.|B|$;

Теорема (принцип на делението): Нека A и B са крайни множества. Ако B $\neq \emptyset$, то $\frac{|A \times B|}{|B|} = |A|$.

Теорема (принцип на включването и изключването): Нека A е крайно множество и $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$. Тогава:

$$\left| \overline{A_1}^A \cap \overline{A_2}^A \cap \ldots \cap \overline{A_n}^A \right| = |A| - \sum_{i \in \mathbf{I_n}} |A_i| + \sum_{\substack{i, j \in \mathbf{I_n} \\ i \neq j}} |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{i, j, k \in \mathbf{I_n} \\ i \neq j,\, j \neq k,\, k \neq i}} |A_i \cap A_j \cap A_k| +$$

$$+ \ldots + (-1)^n . |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

Основни комбинаторни конфигурации.

Признаците, по които ще подредим комбинаторните конфигурации са наредба и повтаряне на елементите. Ще използваме като дадено крайно множество $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$, $|A| = n > 0$.

Конфигурации с наредба и с повтаряне на елементите: нека m е цяло число, m > 0. Ще означаваме с $K_{Н,П}(n, m)$ множеството, в който всеки елемент е наредена m-торка с елементи от A. Тогава $K_{Н,П}(n, m) = A^m$ и от принципа на умножението => $|K_{Н,П}(n, m)| = |A^m| = |A|^m = n^m$.

Конфигурации с наредба и без повтаряне: нека $1 \leq m \leq n$. Ще означаваме с $K_Н(n, m)$ множеството от всички наредени m-торки с елементи от A, в които всеки елемент може да участва най-много 1 път. Очевидно при m = 1 имаме $K_Н(n, 1) = n$; при m = 2 на първо място в m-торката може да се постави кой да е елемент на A по n начина и на второ място може да се постави кой да е елемент на A без първия избран, т.е. по n-1 начина. От принципа на умножението получаваме, че $K_Н(n, 2) = n.(n-1)$. Разсъждавайки индуктивно по m получаваме: $K_Н(n, m) = n.(n-1). \ldots.(n-m+1)$.

Конфигурациите с наредба и без повторение $K_Н(n, m)$ се наричат **вариации** от n елемента m-ти клас, техният брой се означава с V_n^m. Така получихме: $V_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

При m = n вариациите от n елемента n-ти клас са точно всевъзможните наредби на тези елементи и се наричат **пермутации**, техният брой се означава с P_n; от горния резултат получаваме $P_n = n!$;

Конфигурации без наредба и без повторение: нека $0 \leq m \leq n$. Означаваме с K (n, m) множеството от всички ненаредени m-торки с елементи от A. Всъщност K (n, m) са точно подмножествата на A с по m елемента. За да пресметнем техния брой ще използваме принципа на делението – разглеждаме наредените m-торки $K_Н(n, m)$. Всяка ненаредена m-торка участва в $K_Н(n, m)$ по толкова пъти по колкото можем да наредим нейните елементи, т.е. по m! пъти. В такъв случай имаме: $|K(n, m)| = \frac{|K_Н(n, m)|}{m!} = \frac{n.(n-1).\ldots.(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Конфигурациите без наредба и без повторение K (n, m) наричаме още **комбинации** от n-елемента m-ти клас. Техният брой се означава още с C_n^m. Така получихме: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

изразът $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ се означава още с $\dbinom{n}{m}$ и се нарича **биномен коефициент**;

Конфигурации без наредба и с повторение: нека $0 \le m \le n$. С $K_{\text{п}}$ (n, m) означаваме множеството от всички ненаредени m-торки, като всеки елемент може да присъства произволен брой пъти. Нека $m \ge 1$. Разглеждаме множество от m+n-1 различими кутии и един произволен елемент $\blacklozenge \notin A$. Нека е даден произволен елемент от $K_{\text{п}}$ (n, m). Започвайки отляво оставяме толкова празни кутии, колкото пъти a_1 присъства в m-торката и в следващата кутия поставяме ♦. По-нататък оставяме толкова празни кутии, колкото пъти a_2 присъства в m-торката и в следващата кутия поставяме ♦ и т.н. оставяме толкова празни кутии, колкото пъти a_{n-1} присъства в m-торката и в следващата кутия поставяме ♦ и броят на оставащите кутии и е точно толкова, колкото a_n присъства в ненаредената m-торка. Ясно е, че по този начин еднозначно съпоставяме на всяка ненаредена m-торка разпределение на n-1 знака ♦ в различните m+n-1 кутии.

Например: при n = 5, m = 4 на конфигурацията $[a_1, a_2, a_2, a_5]$ съответства разпределението:

	♦			♦	♦	♦	

Обратно на всяко разпределение на n-1 знака ♦ в различните m+n-1 кутии съответства точно един елемент от $K_{\text{п}}$ (n, m) – елементът a_1 взимаме толкова пъти, колкото празни кутии има от най-лявата кутия до първата, в която има знак ♦, a_2 взимаме толкова пъти, колкото празни кутии има между първата и втората кутия със знак ♦ и т.н. елементът a_n взимаме толкова пъти, колкото празни кутии има между последната кутия със знак ♦ и най-дясната кутия.

Например: при n = 5, m = 4 разпределението:

	♦	♦		♦			♦

Съответства на ненаредената m-торка с повторение: $[a_1, a_3, a_4, a_4]$; сега по принципа на биекцията, броят на елементите на множеството $K_{\text{п}}$ (n, m) е броят на всевъзможните разпределения на n-1 предмета в m+n-1 различни кутии, т.е. $|K_{\text{п}}(n, m)| = \dbinom{m+n-1}{n-1}$.

Ще изведем и формула за **пермутации с повторения**, т.е. броят $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ на различните наредби на n неразличими елементи от k вида – n_1 от първия вид, n_2 от втория вид, ..., n_k от k-тия вид, $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Ясно е, че произволна пермутация на елементите от един вид не променя пермутацията на всичките n, така че от формулата за пермутации и от принципа на делението (приложен k пъти) получаваме $P_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Алгоритъм за решаване на линейни рекурентни отношения с константни коефициенти – хомогенни и нехомогенни.

Дефиниция: Нека редицата $\tilde{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ е такава, че $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$ са зададени явно и $a_{i+r} = c_1 a_{i+r-1} + c_2 a_{i+r-2} + \ldots + c_r a_i$, $i=0,1,2,\ldots$ за някакви константи c_j $j=1,2,\ldots,r$. Равенството, определящо a_{i+r} като линейна функция на предхождащите r члена на редицата наричаме линейно рекурентно отношение от ред r.

За да е напълно определена една редица с линейно рекурентно отношение от ред r е необходимо да са зададени първите r члена на тази редица.

Теорема (за решаване на хомогенни рекурентни отношения): Нека редицата $\tilde{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ е зададена с линейното рекурентно отношение

$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$
$a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = 0,\ n \geq r$

и $t_1, t_2, \ldots t_s$ са различните комплексни корени на характеристичното уравнение $x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_{r-1} x + c_r = 0$ като t_i е с кратност k_i, $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = r$. Тогава $a_n = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)\, t_i^n$, където $P_i(n)$ е полином на n от степен $< k_i$. Полиномите P_i имат общо r коефициента, които се определят еднозначно от първите r члена на редицата $\tilde{a}$.

Същата техника за решаване е приложима и към **нехомогенните линейни рекурентни отношения** от вида:

$a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$
$a_{i+r} = c_1 a_{i+r-1} + c_2 a_{i+r-2} + \ldots + c_r a_i + b_1^n Q_1(n) + \ldots + b_m^n Q_m(n)$, $n \geq r$

където b_j са различни една от друга константи, а $Q_j(n)$ – полином на n от степен $d_j - 1$, $j = 1,2,\ldots,m$. Достатъчно е да означим $t_{r+j} = b_j$, $j = 1,2,\ldots,m$ и да гледаме на него като на d_j кратен корен на характеристичното уравнение. Тогава $a_n = \sum_{i=1}^{r+m} P_i(n)\, t_i^n$ като за намирането на коефициентите на полиномите $P_i(n)$, освен зададените r, ще трябва да бъдат изчислени с помощта на рекурентно отношение още $d_1 + d_2 + \ldots + d_m$ члена на редицата.

Примерна задача може да видите в "Увод в дискретната математика" (В трето издание се пада стр. 56 отгоре).