18.Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснати функции.Теорема на Нютон-Лайбниц.

Автор : Милен Колев Борисов

Понятието определен интеграл е едно от най-централните в математическия анализ. Задачи, чието решаване води по естествен начин до това понятие, са били разглеждани още в древността. Все пак се счита, че то е било въведено в окончателния си вид от Нютон и Лайбниц, през XVII век, които са работили независимо един от друг. Основният техен резултат се състои в тясната връзка, която те са установили, че съществува между такива две на пръв поглед стоящи далеч едно от друго понятия, каквито са понятията определен интеграл и производна на функция.

1. Разбиване на интервал. Суми на Дарбу.

Определение. Казваме, че е дадено едно *деление(разбиване)* на интервала [a,b], ако са дадени точките $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$, за които $a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.

Рис.1

Определение. Разбиването $\gamma'=\{ x'_i \}$ на [a,b] се нарича *по-дребно(по-дробно)* от разбиването $\gamma''=\{ x''_i \}$, ако всяко x''_i съвпада с една от точките на γ'.

Определение. Нека имаме разбиването $\gamma=\{ x_i \}$. Под *диаметър* на разбиването γ ще разбираме дължината на най-големия сегмент на това разбиване. Бележи се с $\dim \gamma = \max\{\Delta x_i\}$, където $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ - дължината на $i^{\text{-тия}}$ сегмент $[x_{i-1}, x_i]$.

Нека в интервала [a,b] е зададена ограничената функция f(x). Нека да въведем следните означения :

- $M_i = \sup\limits_{\Delta_i} f(x)$ супремума(най-голямата стойност) на f(x) в интервала $\Delta_i=[x_{i-1}, x_i]$.
- $m_i = \inf\limits_{\Delta_i} f(x)$ инфимума(най-малката стойност) на f(x) в интервала $\Delta_i=[x_{i-1}, x_i]$.

Сега вече може да дефинираме голяма и малка сума на Дарбу.

Дефиниция. Нека $\gamma=\{ x_i \}$ е разбиване на [a,b]. Нека f(x) е ограничена функция в [a,b]. Тогава сумата :

- $S_\gamma = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ се нарича г*оляма сума на Дарбу* на функцията f(x) за разбиването γ.
- $s_\gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$ се нарича *малка сума на Дарбу* на функцията f(x) за разбиването γ.

Сумите на Дарбу могат лесно да бъдат изтълкувани геометрично. За целта нека $f(x) \geq 0$ в [a,b] и е ограничена и $\gamma=\{ x_i \}$ е разбиване на [a,b]. Да разгледаме сумата s_γ . Всяко нейно събираемо $m_i (x_i - x_{i-1})$ може да бъде изтълкувано като лице на един правоъгълник-правоъгълник, за основа на който служи отсечката, определена върху оста Ox от точките x_{i-1}, x_i , а за височина – отсечката с дължина m_i. Тъй като за всяко x от $[x_{i-1}, x_i]$ имаме $f(x) \geq m_i$, ясно е, че този правоъгалник изцяло ще се съдържа във фигурата, заградена от графиката на функцията f(x), оста Ox и правите с уравнение $x=x_{i-1}$ $x=x_i$ (рис.2). Тогава сумата s_γ ще представлява лицето на един многоъгълник, който е съставен от n-правоъгълника от описания вид и очевидно ще се съдържа в фигурата G, заградена от графиката на функцията f(x) и оста Ox и правите с уравнение x=a и x=b. Този многоъгълник ще наречем вписан във фигурата G.

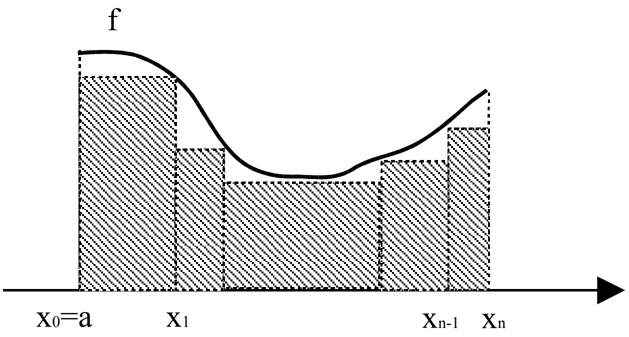

Рис.2

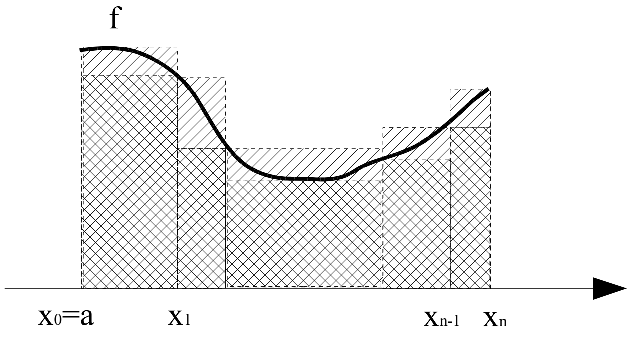

Рис.3

Като разсъждаваме аналогично, можем да изтълкуваме S_γ също като лице на многоъгълник. Това ще бъде един многоъгълник, който пък изцяло съдържа фигурата G и който ще наречем описан около G. И така на всяко разбиване на интервала [a,b] на под интервали отговарят чрез описаната конструкция два многоъгълника – единият – вписан в G, другият – описан около нея (Рис.3). Естествено лицето на фигурата G, да бъде по-голямо или равно на лицето на вписания и по-малко или равно на лицето на описания многоъгълник.

Ето и някои свойства на разбиването :

Свойстово1. Нека $\gamma=\{ x_i \}$ е разбиване на [a,b]. Нека образуваме ново разбиване $\gamma' = \gamma \cup c$, където 'c' е нова точка, така γ' е по-дребно от γ. Тогава $S_{\gamma'} \le S_\gamma$ и $s_{\gamma'} \ge s_\gamma$.

Доказателство. Нека $c \in [x_{i-1}, x_i]$ и означим $M' = \sup\limits_{[x_{i-1},c]} f(x)$, $M'' = \sup\limits_{[c,x_i]} f(x)$, тогава $M'' \le M_i$ и $M' \le M_i$, от където

$M'(c-x_{i-1})+M''(x_i-c) \le M_i(c-x_{i-1})+M_i(x_i-c) \le M_i(x_i-x_{i-1})$ (1).

За да докажем, че $S_{\gamma'} \le S_\gamma$, ще докажем $S_{\gamma'} - S_\gamma \le 0$.

$$S_{\gamma'}-S_\gamma=[\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})-M_i(x_i-x_{i-1})+M'(c-x_{i-1})+M''(x_i-c)]-\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i-x_{i-1})$$

$S_{\gamma'}-S_\gamma=M'(c-x_{i-1})+M''(x_i-c)-M_i(x_i-x_{i-1})$, от (1)

$S_{\gamma'}-S_\gamma \le M_i(x_i-x_{i-1})-M_i(x_i-x_{i-1}) \le 0$

Аналогично се доказва $s_{\gamma'} \ge s_\gamma$.

Свойстово2. Ако едно разбиване γ' е по-дребно от γ, тогава $S_{\gamma'} \le S_\gamma$ и $s_{\gamma'} \ge s_\gamma$.

Доказателство. Следва след многократно прилагане на свойство1.

Нека $f(x) \ge 0$ в [a,b] и е ограничена. Нека за произволно разбиване γ' на интервала [a,b] си образуваме голямата сума на Дарбу S_γ. Сега нека вземем друго разбиване на [a,b] – γ'' и образуваме $s_{\gamma''}$. Ако разгледаме геометрично, фигурата с лице $S_{\gamma'}$ съдържа фигурата с лице $s_{\gamma''}$. Тогава очевидно $s_{\gamma''} \le S_{\gamma'}$. (Рис.4) . Да обобщим казаното в Лема.

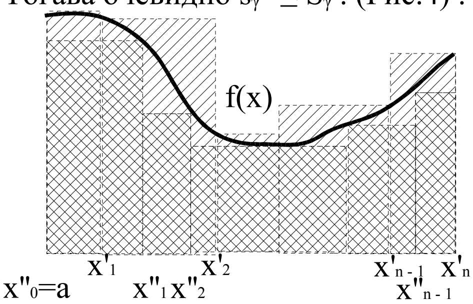

Рис.4

Лема1. Ако γ' и γ'' са две произволни разбивания на интервала [a,b], то $s_{\gamma''} \leq S_{\gamma'}$.

Доказателсво. 1сл.)Ако γ=γ'=γ'' имаме $S_\gamma = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$ и $s_\gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$, от $M_i \geq m_i$, следва $s_\gamma \leq S_\gamma$ (т.е $s_{\gamma''} \leq S_{\gamma'}$).

2сл.) γ'≠γ'' . Тогава взимаме разбиването γ = γ' U γ'', от където γ е по-дребно от γ' и γ''. От свойство2 имаме : $s_{\gamma''} \leq s_\gamma \leq S_\gamma \leq S_{\gamma'}$.

2.Горен и долен интеграл на Дарбу. Риманов интеграл.

Да означим с П множеството от всички разбивания на интервала [a,b].

- Горен интеграл $\bar{I} = \inf_{\gamma \in \Pi} S_\gamma$ се нарича точната долна граница на множеството на големите суми на Дарбу $\{S_\gamma\}$ на дадена функция f(x) за всевъзможните разбивания на интервала [a,b].
- Долен интеграл $\underline{I} = \sup_{\gamma \in \Pi} s_\gamma$ се нарича точната горна граница на множеството на малките суми на Дарбу $\{s_\gamma\}$ на дадена функция f(x) за всевъзможните разбивания на интервала [a,b].

Следствие1. $\underline{I} \leq \bar{I}$ (от Лема1).

Определение. Когато за дадена ограничена функция f(x) в [a,b] е изпълнено равенството : I = $\underline{I}$ = $\bar{I}$, ще казваме , че тя е *интегруема в риманов смисъл* в интервала [a,b] или накратко интегруема. Числото I се нарича *определен интеграл или риманов* на f(x) в този интервал и се означава :

$$I = \int_a^b f(x)\, dx .$$

Нека обърнем внимание на следното : Определеният интеграл е едно число. Поради това е безразлично с каква буква е означена променливата в подитегралната функция f. Това ще рече :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(u)\, du$$

Сумите на Дарбу, с които си послужихме да дефинираме определен интеграл, представляват очевидно едно средство за неговото пресмятане, но доста трудно и неудобно. И все пак в някои специални случай, например когато f(x)=C за всяко x∈[a,b], това не е сложно. Както и да разбиваме интервала [a,b] на под интервали, във всеки от тях точната горна и долна граница ще са равни на C. Тогава за сумите на Дарбу ще получим :

$$S_\gamma = \sum_{i=1}^{n} C(x_i - x_{i-1}) = C(b-a) \quad s_\gamma = \sum_{i=1}^{n} C(x_i - x_{i-1}) = C(b-a)$$, за всяко разбиване γ.

Следователно I = $\underline{I}$ = $\bar{I}$ = C(b-a) или $\int_a^b C\, dx$ = C(b-a).

Лема3. За произволно разбиване γ на [a,b] имаме : $s_\gamma \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S_\gamma$.

Доказателство. От дефиницията на $\underline{I}$ и $\bar{I}$ имаме $s_\gamma \leq \underline{I}$ и $\bar{I} \leq S_\gamma$, от където

$s_\gamma \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq S_\gamma$.

Лема4. Ако f(x) е интегруема в [a,b] и $m \leq f(x) \leq M$ за всяко $x \in [a,b]$, то :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a).$$

Доказателство. За произволно разбиване γ на [a,b] имаме :

$$s_\gamma = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} m (x_i - x_{i-1}) \geq m(b-a)\text{, (от } m \leq m_i \text{)}$$

От $\underline{I} \geq s_\gamma$, за всяко разбиване γ, следва $\underline{I} \geq m(b-a)$. Аналогично се доказва, че $\bar{I} \leq M(b-a)$. Понеже f(x) е интегруема и имаме : $I = \underline{I} = \bar{I}$ и от горните доказателства следва : $m(b-a) \leq I \leq M(b-a)$.

2.Две теореми за интегруемост.

Теорема1. *(НДУ) Функция f(x) е интегруема в Риманов смисъл в [a, b], тогава и само тогава, когато за всяко $\forall \varepsilon > 0$ съществуват разбиване γ на [a,b] такова, че $S_\gamma - s_\gamma < \varepsilon$.*

Доказателство.

1)Нека за $\forall \varepsilon > 0$ съществува разбиване γ на [a,b], такова че $S_\gamma - s_\gamma < \varepsilon$. Ще докажем, че f(x) е интегруема (т.е $\underline{I} = \bar{I}$).

Да допуснем, че $\underline{I} < \bar{I}$. Избираме $\varepsilon = \bar{I} - \underline{I} > 0$, тогава съществува разбиване γ на [a,b], такова че $S_\gamma - s_\gamma < \varepsilon = \bar{I} - \underline{I}$, но имаме $s_\gamma \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_\gamma$. От където

$\bar{I} - S_\gamma \leq 0$ и $s_\gamma - \underline{I} \leq 0$
$\bar{I} - S_\gamma + s_\gamma - \underline{I} \leq 0$
$\bar{I} - \underline{I} \leq S_\gamma - s_\gamma$ (от $S_\gamma - s_\gamma < \varepsilon = \bar{I} - \underline{I}$)
$\bar{I} - \underline{I} < \bar{I} - \underline{I}$

което е противоречие. Така допускането $\underline{I} < \bar{I}$ е грешно, следователно $\underline{I} \geq \bar{I}$. От следствие1 имаме $\underline{I} \leq \bar{I}$ или $\underline{I} = \bar{I}$, което трябваше да докажем.

2)Нека f(x) е интегруема в риманов смисъл (т.е $\underline{I} = \bar{I}$). Ще докажем, че за $\forall \varepsilon > 0$ съществуват разбиване γ на [a,b] такова, че $S_\gamma - s_\gamma < \varepsilon$.

Нека изберем произволно $\varepsilon > 0$. От дефиницията на $\bar{I} = \inf_{\gamma \in \Pi} S_\gamma$ следва, че съществува такова разбиване γ', че $\bar{I} \leq S_{\gamma'} < \bar{I} + \varepsilon$ (едно примерно разбиване за γ' е разбиването, в което се достига инфимума на S_γ , за $\gamma \in \Pi$). Аналогично от дефиницията на $\underline{I} = \sup_{\gamma \in \Pi} s_\gamma$ следва, че съществува такова разбиване γ'', че $\underline{I} - \varepsilon < s_{\gamma''} \leq \underline{I}$ (за γ'' може да вземем разбиването, в което се достига супремума на s_γ, за $\gamma \in \Pi$).

Тогава взимаме разбиването $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$, от където γ е по-дребно от γ' и γ''. От свойство2 имаме : $s_{\gamma''} \leq s_\gamma \leq S_\gamma \leq S_{\gamma'}$, от където

$\underline{I} - \varepsilon < s_{\gamma''} \leq s_\gamma \leq S_\gamma \leq S_{\gamma'} < \bar{I} + \varepsilon$
$S_\gamma < \bar{I} + \varepsilon$ и $- s_\gamma < - \underline{I} + \varepsilon$

$S_\gamma + (-s_\gamma) < \bar{I} + \varepsilon + (-\underline{I} + \varepsilon)$
$S_\gamma - s_\gamma < 2\varepsilon$

което трябваше да докажем. (т.е за $\forall\varepsilon_1=2\varepsilon>0$, $\exists\gamma$: $S_\gamma - s_\gamma < \varepsilon_1$).

Нека сега да си припомним понятията равномерна непрекъснатост и осцилация на функция.

Определение. Една функция f(x) се нарича *равномерно непрекъсната* в дадено множество M от реални числа, ако за всяко положително число ε съществува такова положително число *δ*, че за всеки две точки x' и x'' от M, удовлетворяващи неравенството |x'-x''|< *δ* е изпълнено неравенството |f(x')-f(x'')|< ε .

Определение. Нека имаме функцията f(x) дефинирана в интервала [a,b]. Да означим с $M = \sup_{[a,b]} f(x)$ и $m = \inf_{[a,b]} f(x)$, тогава под осцилация на функция на f(x) в [a,b] ще разбираме W(f,[a,b]) = M – m (т.е разликата между точната горна и точната долна граница на f в [a,b]). Забележка : за да съществуват M и m трябва f(x) да е непрекъсната в [a,b] (т.е ограничена).

Теорема на Риман. *Всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната в този интервал.*

Теорема за ограниченост. *Ако функцията f(x) е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a,b], то тя е ограничена в този интервал.*

Твърдение1. *Ако функцията f(x) е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a,b], то за $\forall\varepsilon>0$ съществува такова число $\delta_{(\varepsilon)}>0$, че във всеки под интервал на [a,b] с дължина по-малка от δ, осцилацията на f(x) е по-малка от ε.*

Доказателсво. От теоремата на Риман и теоремата за ограниченост имаме : f(x) е равномерно непрекъсната и ограничена в [a,b].

Нека си изберем едно произволно ε>0. От f(x) равномерно непрекъсната следва : съществува такова δ>0, че за всеки две точки x' и x'' от [a,b] удовлетворяващи неравенството |x'-x''|< δ е изпълнено неравенството |f(x')-f(x'')|< ε (1).

Сега нека си вземем произволен под интервал [c,d]⊆[a,b] с дължина по-малка от δ. От факта, че f(x) е ограничена в [a,b] следва, че и f(x) е ограничена и в [c,d], от където f(x) има точна горна граница и точна долна граница в [c,d]. Нека те се достигат съответно в точките x_1 и x_2 (т.е $M=f(x_1)$, $m=f(x_2)$, за някои x_1 и x_2 от [c,d]). Имаме x_1 и x_2 принадлежащи на [c,d] следователно $|x_1-x_2| < \delta$ и от (1) за $x'=x_1$ и $x''=x_2$ следва : $W(f,[c,d])=f(x_1)-f(x_2)=|f(x_1)-f(x_2)|< \varepsilon$, което трябваше да докажем.

Следствие1.

Ако f(x) е непрекъсната в крайния затворен интервал [a,b], тогава за $\forall\varepsilon>0$ съществува разбиване $\gamma=\{x_n\}$ на [a,b] такова, че $W(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$ за i=1...n (т.е във всеки под интервал на γ осцилацията на f(x) е по-малка от ε).

Доказателсво. Като изберем едно произволно положително число ε>0, знаем, че съществува такова δ>0, че във всеки под интервал на [a,b] с дължина по-малка от δ, осцилацията на f(x) е по-малка от ε. Да разделим(разбием) интервала [a,b] на подинтервали така, че дължината на всеки от тях да бъде по-малка от δ. Например да разделим [a,b] на *n* равни части, като вземем *n* толкова голямо, че да е изпълнено неравенството (b-a)/n< δ. Тогава във всеки от така получените подинтервали осцилацията на f(x) ще бъде по-малка от ε.

Теорема2. *Ако функцията f(x) е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a, b], то тя е интегруема в този интервал.*

Доказателство.

Нека изберем произволно ε>0. От следствие1 имаме , че съществува разбиване γ на [a,b] такова, че $W(f, [x_{i-1}, x_i]) < \varepsilon$ или $M_i - m_i < \varepsilon$ за i=1..n .

$$S_\gamma - s_\gamma = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \epsilon (x_i - x_{i-1}) < \epsilon (b - a)$$

тоест за произволно $\varepsilon_1 = \varepsilon(b-a) > 0$ имаме разбиване γ на [a,b] такова, че $S_\gamma - s_\gamma < \varepsilon_1$. Така са изпълнени условията на теорема1, от където f(x) е интегруема в [a,b].

3.Сума на Риман. Риманов интеграл.

Нека отново да разгледаме ограничената функция f(x) в интервала [a,b]. Нека γ е разбиване на [a,b]. Нека от всеки под интервал $[x_{i-1}, x_i]$ изберем една произволна точка ξ_i.

Определение5. Сумата $\sigma = \sigma_\gamma(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, се нарича *сума на Риман*.

Тя зависи очевидно от разбиването γ и начина на избора на точките ξ_i. От неравенството $m_i \le \xi_i \le M_i$ следва : $s_\gamma \le \sigma_\gamma \le S_\gamma$, за всяка риманова сума на разбиването γ. Геометрично за f(x)>0 една риманова сума е изобразена на рис.5

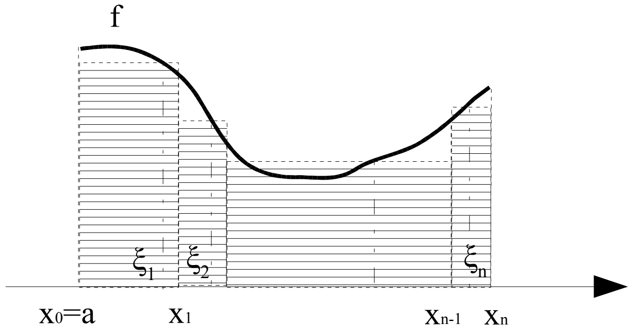

Рис.5

Нека ни е дадена една безкрайна редица от разбивания γ_0, γ_1, ..., γ_n, ... на интервала [a,b]. Ще казваме, че редицата $\{\gamma_n\}$ е *издребняваща редица от разбивания* на [a,b] на под интервали, когато редицата от числа dim γ_0, dim γ_1, ..., dimγ_n, ... клони към 0.

Теорема4. *Нека функцията f(x) е непрекъсната в краен и затворен интервал [a,b]. Ако е дадена една издребняваща редица от разбивания $\{\gamma_n\}$ на [a,b] и ако при всяко от тези разбивания си образуваме по една риманова сума $\sigma_{\gamma i}(\xi_j)$ за f(x), то редицата от така получените суми*

$\sigma_{\gamma 1}(\xi_j)$, $\sigma_{\gamma 2}(\xi_j)$, ..., $\sigma_{\gamma n}(\xi_j)$, ...

е сходяща и клони към интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$.

Доказателство. Нека $\varepsilon>0$ е произволно. Трябва да намерим такова число υ, че при $n>\upsilon$ да имаме : $| \sigma_{\gamma n}(\xi_j) - \int_a^b f(x)\,dx | < \varepsilon$.

От твърдение1 имаме, че съществува такова число $\delta_{(\varepsilon)}>0$, че за всеки под интервал $[c,d] \subseteq [a,b]$ с дължина по-малка от δ, имаме W(f,[c,d]) < e/(b-a). От друга страна редицата от разбивания $\{\gamma_n\}$ е издребняваща, тоест съществува такова число $\upsilon>0$, че при $n>\upsilon$, ще имаме dim $\gamma_n < \delta$. От където $W(f,[x_{i-1},x_i]) <$ e/(b-a) (*), за всеки под интервал $[x_{i-1},x_i]$ на всяко едно от тези разбивания γ_n, $n>\upsilon$.

Нека разгледаме едно разбиване $\gamma' = \gamma_n$ за $n>\upsilon$, за него имаме :

$s_{\gamma'} \le \sigma_{\gamma'}(\xi_j) \le S_{\gamma'}$ и $s_{\gamma'} \le \int_a^b f(x)\,dx \le S_{\gamma'}$

$|\sigma_{\gamma'}(\xi_j) - \int_a^b f(x)\,dx| \le S_{\gamma'} - s_{\gamma'}$

От (*) следва, че за всеки под интервал $[x_{i-1},x_i]$ на $\gamma'=\gamma_n$ имаме: $M_i-m_i = W(f,[x_{i-1},x_i]) < e/(b-a)=$ e1 и от

$$S_{\gamma'} - s_{\gamma'} = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n}\epsilon_1(x_i - x_{i-1}) < \epsilon_1(b-a) < \epsilon$$

$$|\sigma_{\gamma'}(\xi_j) - \int_a^b f(x)\,dx| < \varepsilon$$

което трябваше да докажем.

Така доказахме, че границата на произволна редица от риманови суми за f(x), получена от произволна издребняваща редица от разбивания на [a,b], клони към определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Това ни дава възможност да дефинираме определения интеграл и по друг начин, а именно като границата на редиците от риманови суми на f(x), получени от издребняващите редици от разбивания на [a,b]. Затова определеният интеграл се нарича и риманов.

4.Основни свойства на определените интеграли.

1. Ако f(x) е една функция, непрекъсната в интервала [a,b], а C е едно реално число, то
   $$\int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx$$
2. Ако функциите f(x) и g(x) са непрекъснати в интервала [a,b], то
   $$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
3. Ако функциите f(x) и g(x) са непрекъснати в интервала [a,b] и удовлетворяват неравенството $f(x) \le g(x)$ за всяко $x \in [a,b]$, то
   $$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$
4. Ако f(x) е непрекъсната в интервала [a,b], то
   $$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$
5. Ако f(x) е непрекъсната в интервала [a,b] и ако c е една вътрешна точка от този интервал, то
   $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
6. Ако f(x) е непрекъсната в интервала [a,b] и ако m и M са съответно една нейна долна и една нейна горна граница в този интервал, то
   $$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

5.Теорема за средните стойности.

Теорема5. (Теорема за средните стойности.) *Ако функцията f(x) е непрекъсната в крайния и затворен интервал [a,b], то съществува поне една точка* $\xi \in [a,b]$*, за която е изпълнено равенството* $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$

Доказателство. Да означим с m и M съответно точната долна и точната горна граница на f(x) в интервала [a,b] (т.е. $\forall x \in [a,b]\ m \le f(x) \le M$) . Свойстово4.1 имаме :

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \text{ или } m \le \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \le M \quad (*)$$

От непрекъснатостта на f(x) в [a,b] и теоремата на Вайрщрас имаме, че съществуват точките x_1 и x_2 от [a,b] , за които $f(x_1) = m$ и $f(x_2)=M$.

1сл.) Ако $x_1=x_2$ следва, че f(x)=C е константа в [a,b]. Тогава $\int_a^b C\,dx = C(b-a)$, и за f (a)=C теоремата е доказана.

2сл) Ако $x_1 \neq x_2$. От f(x) непрекъсната и от (*) следва, че съществува точка $\xi \in [a,b]$, за която е изпълнено равенството :

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \text{ , от където } f(\xi)(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

и теоремата е доказана.

6.Теорема на Лайбниц и Нютон.

Тази теорема представя една проста връзка между понятията определен и неопределен интеграл на непрекъсната функция f(x).

Теореама6.*Ако функцията f(x) е непрекъсната в един интервал D, то функцията* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *е диференцируема в този интервал и за всяко* $x \in D$ *е изпълнено равенството* $F'(x)=f(x)$ *, т.е. F(x) е примитивна функция на f(x) в интервала D.*

Доказателство. Нека x е произволна точка от интервала D. Ако $x_1=x+h$ е друга точка от този интервал, то :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Като приложим теоремата за средните стойности (теорема5) към последния интеграл, ще получим : $\exists\xi \in$[x,x+h], такава че $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)(x+h-x) = f(\xi)$. От където :

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi)$$

Ако пуснем h⟶x , то и ξ⟶x. Ето защо, като вземем пред вид непрекъснатостта на f(x) в точката x, ще получим

$$F'(x) = \lim_{h\to\infty}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to\infty} f(\xi) = f(x)$$

С това равенство теоремата е доказана.

Теоремата на Лайбниц и Нютон ни дава един прост начин за пресмятане на определените интеграли от непрекъснати функции. Наистина нека да пресметнем стойността на интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

където f(x) е една функция, непрекъсната в интервала [a,b]. Ако образуваме функцията $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, ще имаме F(b) = $\int_a^b f(t)\,dt$. Така задачата е да се пресметне F(b). Ние видяхме, че F(x) е една примитивна на f(x). Но функцията f(x) има безбройно много примитивни, всяка от които, както знаем, се различава от F(x) с константа. Нека познаваме, някоя (коя да е) примитивна функция Φ(x) на f(x) в интервала [a,b]. Ще имаме

F(x) = Φ(x) + C.

За да пресметнем константа C, нека вземем x=a. Имаме F(a) = $\int_a^a f(t)\,dt = 0$. Тогава : 0 = F(a) = Φ(a) + C, следователно C= - Φ(a). И така за всяко x от интервала [a,b] е изпълнено равенството

F(x) = Φ(x) – Φ(a).

Специално при x=b ще получим

F(b) = Φ(b) – Φ(a).

или окончателно

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\,\Big|_b^a \qquad (1)$$

От изложението се вижда, че за да пресметнем определения интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, трябва да пресметнем най-напред неопределения интеграл $\int f(x)\,dx$, т.е да намерим една примитивна функция Φ(x) на f , след което да приложим формула (1).

Пример : Да се пресметне $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Решение : От $\int \frac{1}{1+x^2} = arctg(x) + C$ следва $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg(1) - arctg(0) = \frac{\Pi}{4}$