Компютърна графика

Информатика IV курс, II поток 2012/2013 г.

Лекция № 3

лектор: гл. ас. д-р В. Гушев

по курса на $\boxed{\textit{доц. д-р Спас Петров Ташев}}$

Алгоритъм на Брезенхам за растеризиране на окръжност

Както за отсечка така и за окръжност алгоритмите на Брезенхам са едни от най-ефективните.

Нека окръжността, чиито растер търсим да е центрирана в началото на координатната система и радиусът ѝ R да е цяло число (в нашия случай – R е кратно на h), т.е. тя да има уравнение

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Ние ще растеризираме само частта от нея, лежаща във втори октант, което е достатъчно за да се получи пълния ѝ растер.

Започваме от пиксела с координати $(0, R)$ и се движим по посока на часовниковата стрелка до правата $y = x$, описвайки втори октант, при което y е намаляваща функция на x.

Сега на всеки пиксел с координати (x, y) от втори октант ще отговарят още 7 пиксела от останалите октанти, а именно пикселите с координати

$$(y, x), (-y, x), (x, -y), (-x, -y), (-y, -x), (-x, y).$$

Функцията $f(x, y)$ е отрицателна за точки вътре в кръга, определен от нашата окръжност, а за точки извън него е положителна.

Освен това величината $|f(x, y)|$ показва колко точката, с координати (x, y) е отдалечена от нашата окръжност.

Да предположим, че на текущата стъпка се намираме в точка $P = (x, y)$ от втори октант и се движим по посока на часовниковата стрелка, т.е. на следващата стъпка трябва да изберем един от следните 3 пиксела

$$H = (x + h, y),\ D = (x + h, y - h),\ V = (x, y - h).$$

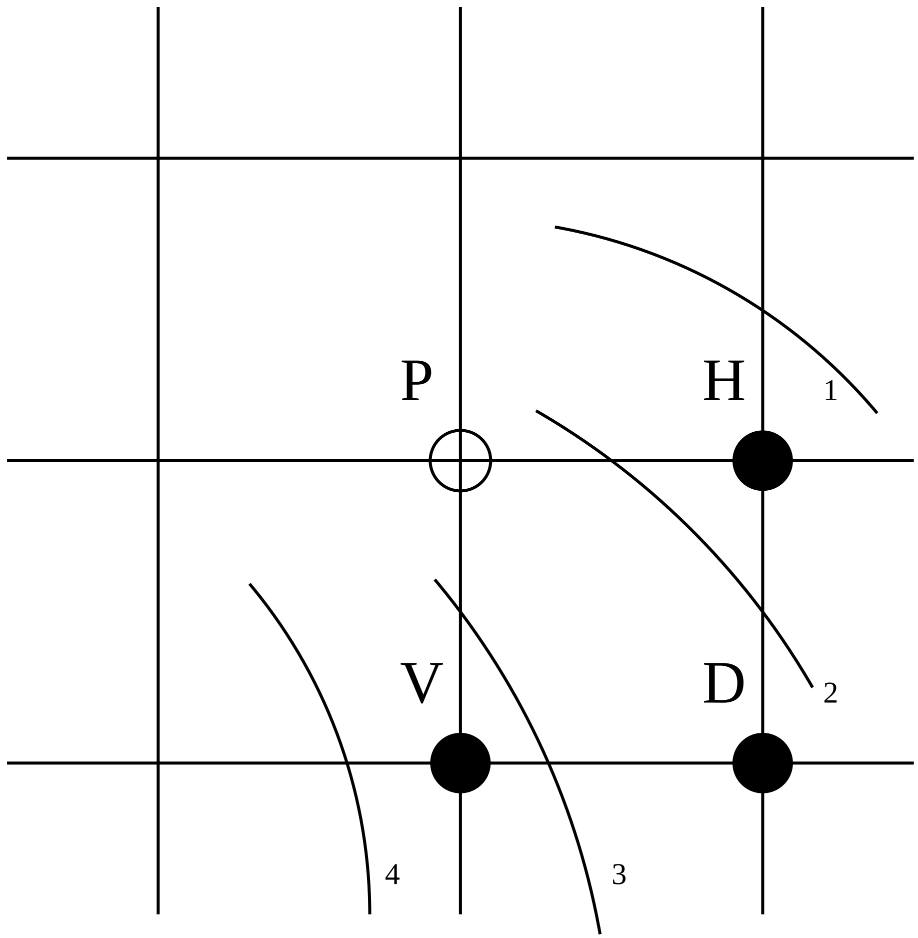

Fig. 2.5

Да означим грешката за текущата точка $P = (x, y)$ с Δ_P, където

$$\Delta_P = f(D) = (x + h)^2 + (y - h)^2 - R^2,$$

т.е. вземаме стойността на f в D – диагоналната на P точка.

Сега въз основа на знака на Δ_P ще определим коя от трите точки да причислим към растера.

За знака на грешката Δ_P имаме:

1. Ако $\Delta_P < 0$, то диагоналната точка D е вътрешна за окръжността. Тогава избираме новия пиксел измежду D и H, в зависимост от това коя от точките D или H е по-близо до окръжността. На фигурата това са случаите 1 и 2.

За да решим коя точка да изберем разглеждаме величината

$$\delta_P = |f(H)| - |f(D)|.$$

1.1. Ако $\delta_P < 0$ $(|f(D)| > |f(H)|)$, то точката H е по-близо до окръжността и избираме нея.

1.2. В случай, че $\delta_P > 0$, то т. D е по-близо до окръжността и избираме нея, а при $\delta_P = 0$ (двете точки са на равни разстояния от окръжността) избираме произволна от тях (напр. отново D).

И така в случая $\Delta_P < 0$, имаме

1. $\Delta_P < 0$

1.1. $\delta_P < 0$, избираме т. H;

1.2. $\delta_P \geq 0$, избираме т. D.

Сега ще изследваме по-подробно положенията на окръжността спрямо точките D и H – случай 1 и случай 2 от фигурата и ще пресметнем δ_P във всеки от случаите.

Ако имаме случай 1 от фигурата, то двете точки са вътрешни и $\delta_P = -f(H) + f(D)$.

В този случай имаме

$$\delta_P = -f(H)+f(D) = -(x+h)^2-y^2+(x+h)^2+(y-h)^2 = -h(2y-h),$$

т.е. $\delta_P < 0$ (понеже точката (x, y) лежи във втори октант, където $y \geq h$) или по-близо до окръжността лежи т. H и следователно избираме нея за растера.

Ако окръжността е пресякла грида на пикселите както в случай 2 от фигурата, то т. H е външна, а т. D е вътрешна за окръжността.

В този случай, като се освободим от абсолютната стойност, имаме

$$\delta_P = f(H) + f(D) = 2f(D) + f(H) - f(D) =$$

$$= 2\Delta_P + (x+h)^2 + y^2 - (x+h)^2 - (y-h)^2,$$

т.е.

$$\delta_P = 2\Delta_P + 2yh - h^2. \qquad (1)$$

Сега в зависимост от знака на δ_P ще изберем D или H.

2. Нека сега $\Delta_P > 0$. Тогава точка D е външна и трябва да избираме измежду точки D и V. Да разгледаме друга величина

$$\varepsilon_P = |f(D)| - |f(V)|.$$

Разсъждавайки както по-горе, стигаме до извода:

2. $\Delta_P > 0$

2.1. $\varepsilon_P \leq 0$, избираме т. D;

2.2. $\varepsilon_P > 0$, избираме т.V.

В случай 3 от фигурата (D е външна, а V – вътрешна) ще имаме

$$\varepsilon_P = f(D) + f(V) = 2f(D) + f(V) - f(D) = 2\Delta_P - 2xh - h^2,$$

т.е.

$$\varepsilon_P = 2\Delta_P - 2xh - h^2. \tag{2}$$

Сега в зависимост от знака на ε_P ще изберем V или D.

При случай 4 от фигурата (D и V – външни) аналогично на случай 1 ще имаме

$$\varepsilon_P = f(D) - f(V) = 2xh + h^2,$$

т.е. $\varepsilon_P > 0$ (понеже точката (x, y) лежи в първи квадрант, където $x > 0$) и следователно избираме т. V за растера.

Казаното до тук може да се резюмира така:

От случай 2 и равенство (1) следва, че при

$$\Delta_p < -yh + \frac{1}{2}h^2$$

трябва да изберем точка H.

Също така от случай 3 и равенство (2) следва, че при

$$\Delta_p > xh + \frac{1}{2}h^2$$

трябва да изберем точка V, а в останалите случаи

$$-yh + \frac{1}{2}h^2 \leq \Delta_p \leq xh + \frac{1}{2}h^2$$

трябва да изберем точка D.

Независимо коя точка сме избрали, трябва да пресметнем съответната грешка Δ_H, Δ_D или Δ_V.

Имаме

$$\Delta_H = (x+2h)^2 + (y-h)^2 - R^2 =$$

$$= (x+h)^2 + (y-h)^2 - R^2 + (x+2h)^2 - (x+h)^2 =$$

$$= \Delta_P + 2(x+h)h + h^2 = \Delta_P + 2xh + 3h^2.$$

$$\Delta_D = (x+2h)^2 + (y-2h)^2 - R^2 =$$

$$= (x+h)^2 + (y-h)^2 - R^2 + (x+2h)^2 - (x+h)^2 + (y-2h)^2 - (y-h)^2 =$$

$$= \Delta_P + 2(x+h)h + h^2 - 2(y-h)h + h^2 = \Delta_P + 2xh - 2yh + 6h^2.$$

$$\Delta_V = (x+h)^2 + (y-2h)^2 - R^2 = (x+h)^2 + (y-h)^2 - R^2 + (y-2h)^2 - (y-h)^2 =$$

$$= \Delta_P - 2(y-h)h + h^2 = \Delta_P - 2yh + 3h^2.$$

Понеже започваме с точката $(0, R)$, то в началото ще положим

$$\Delta = (0 + h)^2 + (R - h)^2 - R^2 = 2h(h - R).$$

От тук и по-горните формули се вижда, че вместо с Δ можем да работим с $\bar{\Delta} = \dfrac{\Delta}{h}$.

Ето и примерна програма, реализираща този алгоритъм в първи квадрант.

```
Bresenham.central.circle(R)
/* инициализиране на променливите */
x=0
y=R;
Δ = 2h(h-R);
while (y > 0) /* или (y >= x) - за втори октант */
  setpixel(x,y)
  if Δ < 0 then
   δ = 2Δ + 2yh - h^2
   if δ < 0 then call mh(x,y,Δ) else call md(x,y,Δ)
  else /*Δ ≥ 0 */
   ε = 2Δ- 2xh -h^2
   if ε > 0 then call mv(x,y,Δ) else call md(x,y,Δ)
end while (y > 0)
```

```
subroutine mh(x,y,△) begin
  x=x+h
  △ = △ +2xh+3h^2
end /* mh */
subroutine mv(x,y,△) begin
  y=y-h
  △ = △ - 2yh+3h^2
end /* mv */
subroutine md(x,y,△) begin
  x=x+h; y=y-h
  △ = △ + 2xh - 2yh+6h^2
end /* md */
```

Алгоритъм на средната точка за растеризиране на окръжност

Нека уравнението на окръжността да бъде както и преди с уравнение:

$$f(x, y) \equiv x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Както вече видяхме достатъчно е да намерим растера на тази окръжност само в един октант.

Да изберем за разнообразие първи октант, да започнем от точката с координати $(R, 0)$ и да се движим по посока обратна на часовниковата стрелка докато $y < x$.

Ако текущата точка е $P = (x, y)$, то кандидати за точки от растера в първи октант са вертикалната точка $V = (x, y + h)$ и диагоналната точка $D = (x - h, y + h)$, отбелязани с черен кръг на фигурата.

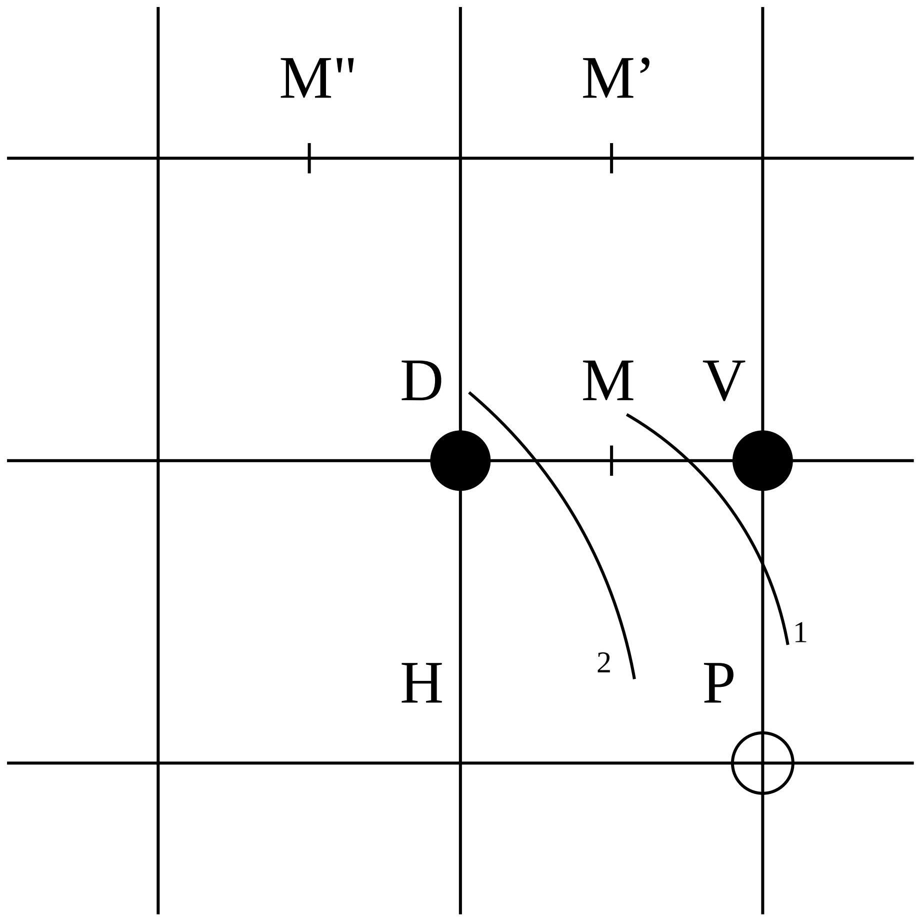

Fig. 2.6

Този алгоритъм работи когато трябва да се избира измежду две точки, както е в случая.

Ще изследваме функцията f в средата $M = (x - \dfrac{h}{2}, y + h)$ между на точките V и D.

При $f(M) < 0$, т.е. точката M е вътрешна за окръжността (случай 1 на фигурата) избираме точка V. При $f(M) > 0$ (случай 2 на фигурата) избираме точка D, а при $f(M) = 0$ – отново т. D.

Нека грешката е

$$E_P = f(M)$$

и нека тя е отрицателна, т.е. избрали сме точка V. Тогава

$$E_V = f(M) + f(M') - f(M) =$$

$$= f(M) + [(x - \frac{h}{2})^2 + (y + 2h)^2 - R^2] - [(x - \frac{h}{2})^2 + (y + h)^2 - R^2] =$$

$$= E_P + (y + h + h)^2 - (y + h)^2 = E_P + 2(y + h)h + h^2 = E_P + 2yh + 3h^2,$$

$$E_V = E_P + d_P^V, \quad \text{където } d_P^V = 2yh + 3h^2. \tag{3}$$

Ако сме избрали точката D, т.е. $E_P > 0$, то новата грешка ще бъде

$$E_D = f(M) + f(M'') - f(M) =$$

$$= f(M) + [(x - \frac{3h}{2})^2 + (y + 2h)^2 - R^2] - [(x - \frac{h}{2})^2 + (y + h)^2 - R^2] =$$

$$= E_P + (x - \frac{h}{2} - h)^2 - (x - \frac{h}{2})^2 + (y + h + h)^2 - (y + h)^2 =$$

$$= E_P - 2h(x - \frac{h}{2}) + 2(y + h)h + 2h^2 = E_P - 2xh + 2yh + 5h^2,$$

т.е.

$$E_D = E_P + d_P^D, \quad \text{където } d_P^D = -2xh + 2yh + 5h^2. \tag{4}$$

В началото имаме $P = (R, 0)$, т.е. $M\left(R - \frac{h}{2}, h\right)$ и трябва да положим

$$E_P = f\left(R - \frac{h}{2}, h\right) = -Rh + \frac{5h^2}{4}.$$

Вижда се, че вместо E_P можем да работим с $\bar{E}_P = \frac{E_P}{h}$.

Тогава ще имаме формулите

$$\bar{E}_P = -R + \frac{5h}{4}. \tag{5}$$

$$\bar{E}_V = \bar{E}_P + \bar{d}_P^V, \quad \text{където } \bar{d}_P^V = 2y + 3h. \tag{6}$$

$$\bar{E}_D = \bar{E}_P + \bar{d}_P^D, \quad \text{където } \bar{d}_P^D = -2x + 2y + 5h. \tag{7}$$

Алгоритъм с крайни разлики от II ред за растеризиране на окръжност

Този алгоритъм е малка модификация на алгоритъма на средната точка. Трябва да пресметнем поправките на d_P^V и d_P^D, когато от точка P отиваме в точка V или точка D от последната фигура.

1. От точка P отиваме в точка V.

Нека $V = (x', y') = (x, y + h)$. От (6) и (7) имаме

$$d_V^V = 2y' + 3h = 2(y + h) + 3h = 2y + 3h + 2h = d_P^V + 2h \tag{8}$$

и

$$d_V^D = -2x' + 2y' + 5h = -2x + 2(y + h) + 5h = -2x + 2y + 5h + 2h = d_P^D + 2h. \tag{9}$$

2. От точка P отиваме в точка D.

Нека $D = (x'', y'') = (x - h, y + h)$. От (6) и (7) имаме

$$d_D^V = 2y'' + 3h = 2(y + h) + 3h = 2y + 3h + 2h = d_P^V + 2h \qquad (10)$$

и

$$d_D^D = -2x'' + 2y'' + 5h$$

$$= -2(x - h) + 2(y + h) + 5h = -2x + 2y + 5h + 4h = d_P^D + 4h. \qquad (11)$$

Вижда се, че поправките са или $2h$ или $4h$, които са константи (не зависят от координатите на точките) и това са точно вторите крайни разлики на функцията $f(x, y)$ със стъпка h, разделени на h (заради модификацията $\bar{E}_P = \dfrac{E_P}{h}$).

За алгоритъма трябва да въведем 2 нови променливи например d^V и d^D и трябва да ги инициализираме по формулите (6) и (7):

$$(x, y) = (R, 0), \quad d^V = 3h, \quad d^D = -2R + 5h.$$