

Решения на задачите от
ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ
за завършване на образователно-квалификационната степен „бакалавър“
за специалност „Математика и информатика“ (5 август 2020 г.)

Задача 1. а) Даден е полиномът $P(x) = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 1$. Да се намерят остатъците при делението на $P(x)$ с $x^2 - 4$ и с $x^2 + x + 3$, съответно.

б) Да се намери полином от трета степен, който при деление с $x^2 - 4$ да дава остатък $2x - 5$, а при деление с $x^2 + x + 3$ да дава остатък $-5x - 9$.

Решение 1.

1.а) Деление на $P(x)$ с $x^2 - 4$:

$$\begin{array}{r} \underline{5x^3 - 3x^2 + 7x + 1} \quad |x^2 - 4 \\ 5x^3 \qquad -20x \qquad \qquad \qquad 5x - 3 \\ \hline -3x^2 + 27x + 1 \\ \underline{-3x^2 \qquad +12} \\ 27x - 11 \end{array}.$$

Проверка:

$$(x^2 - 4)(5x - 3) + (27x - 11) = (5x^3 - 3x^2 - 20x + 12) + 27x - 11 = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 1.$$

Деление на $P(x)$ с $x^2 + x + 3$:

$$\begin{array}{r} \underline{5x^3 - 3x^2 + 7x + 1} \quad |x^2 + x + 3 \\ 5x^3 + 5x^2 + 15x \qquad \qquad \qquad 5x - 8 \\ \hline -8x^2 - 8x + 1 \\ \underline{-8x^2 - 8x - 24} \\ 25 \end{array}.$$

Проверка:

$$(x^2 + x + 3)(5x - 8) + (25) = (5x^3 + 5x^2 + 15x - 8x^2 - 8x - 24) + 25 = 5x^3 - 3x^2 + 7x + 1.$$

1.б) Да означим търсения полином с $P(x)$:

$$P(x) = Q(x) \cdot (x^2 - 4) + (2x - 5) = (ax + b) \cdot (x^2 - 4) + 2x - 5,$$

$$P(x) = R(x) \cdot (x^2 + x + 3) + (-5x - 9) = (cx + d) \cdot (x^2 + x + 3) - 5x - 9.$$

При $x = \pm 2$, $Q(x) \cdot (x^2 - 4) = 0$. Следователно, $P(2) = -1$ и $P(-2) = -9$.

$$\begin{array}{l} P(2) = (2c + d) \cdot 9 - 10 - 9 = -1, \\ P(-2) = (-2c + d) \cdot 5 + 10 - 9 = -9; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 18c + 9d = 18, \\ -10c + 5d = -10; \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2c + d = 2, \\ 2c - d = 2. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c = 1, \\ d = 0. \end{array}$$

$$R(x) = x \Rightarrow P(x) = x \cdot (x^2 + x + 3) - 5x - 9 = x^3 + x^2 + 3x - 5x - 9 = x^3 + x^2 - 2x - 9.$$

Отговори. 1.а) $(27x - 11)$ и (25) ; 1.б) $x^3 + x^2 - 2x - 9$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни a, b и c , медиани съответно m_a, m_b и m_c , и лице S .

а) Да се докаже, че $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ и $Q = \frac{3}{4}S$, където Q е лицето на триъгълника, със страни медианите m_a, m_b и m_c .

б) Да се докаже, че сборът на котангенсите на ъглите на триъгълника ABC е равен на сбора на котангенсите на ъглите на триъгълника, със страни медианите m_a, m_b и m_c .

Решение 2. Нека в $\triangle ABC$ (вж. фигурата), точките A_1, B_1 и C_1 са краищата на медианите m_a, m_b и m_c съответно, точка G_1 е симетрична на медицентъра G спрямо точка C_1 , а точка C_2 е симетрична на върха C , отново спрямо точка C_1 .

Доказателство 2.а) Тъй като в успоредника сборът от квадратите на диагоналите е равен на сбора от квадратите на страните, можем да запишем (вж. AC_2BC):

$$(2m_c)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Оттук, а по аналогия и за останалите медиани, следва че

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$m_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2)$$

или събирайки тези равенства,

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

□

Четириъгълникът AG_1BG е успоредник, тъй като $AC_1 = C_1B$ по условие, а $GC_1 = C_1G_1$ по построение. Тогава

$$AG = \frac{2}{3}m_a, \quad AG_1 = GB = \frac{2}{3}m_b, \quad GG_1 = 2GC_1 = \frac{2}{3}m_c,$$

или триъгълникът AG_1G е подобен на триъгълника със страни медианите m_a, m_b и m_c , с коефициент на подобие $\kappa = \frac{2}{3}$, откъдето $S_{\triangle AG_1G} = \kappa^2 Q$. От друга страна, $S_{\triangle AG_1G} = S_{\triangle ABG} = \frac{1}{3}S$, или

$$Q = \frac{1}{\kappa^2} \cdot \frac{1}{3}S = \frac{3}{4}S.$$

□

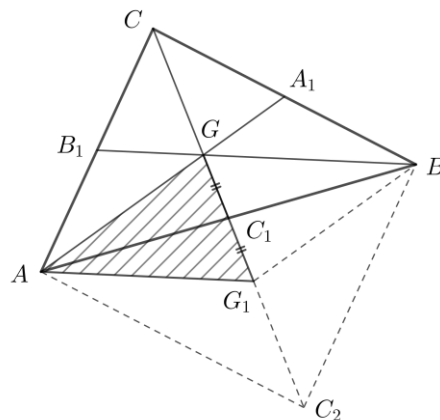
Доказателство 2.б) Нека α, β и γ са ъглите при върховете съответно A, B и C на $\triangle ABC$. Лицето

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \Rightarrow \sin \gamma = \frac{2S}{ab}.$$

Чрез косинусовата теорема можем да изразим

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Оттук, а по аналогия и за останалите ъгли при върховете, следва че



$$\begin{aligned}\cotg \gamma &= \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{ab}{2S} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} \\ \cotg \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S} \\ \cotg \beta &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4S}\end{aligned}$$

или събирайки тези равенства,

$$\cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S} = \frac{\frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)}{4 \cdot \frac{4}{3}Q} = \frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{4Q}. \quad \square$$

Последният израз е равен на сбора от котангенсите на триъгълника, с лице Q и със страни медианите m_a , m_b и m_c , който в общия случай не е подобен на дадения триъгълник ABC .

Задача 3. Да се намерят стойностите на параметъра a , за които уравнението

$$2 \sin x + \cos x = a \quad (*)$$

има единствено решение в интервала $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение 3. I начин. Изрази от вида $p \sin x + q \cos x$ (за които $\sqrt{p^2 + q^2} \neq 0$), могат да се преобразуват по следната схема:

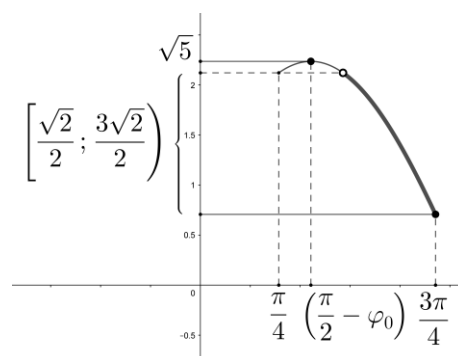
$$\begin{aligned}p \sin x + q \cos x &= \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \left(\underbrace{\frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}}_{\cos \varphi_0} \cdot \sin x + \underbrace{\frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}}_{\sin \varphi_0} \cdot \cos x \right) \\ &= \sqrt{p^2 + q^2} \cdot (\sin x \cos \varphi_0 + \cos x \sin \varphi_0) = \sqrt{p^2 + q^2} \cdot \sin(x + \varphi_0),\end{aligned}$$

тъй като $\left| \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right| \leq 1$ и $\left| \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}} \right| \leq 1$.

По аналогия, даденото уравнение се преобразува в

$$2 \sin x + \cos x = \sqrt{5} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos x \right) = \sqrt{5} \cdot \sin(x + \varphi_0) = a.$$

За да има уравнението $(*)$ единствено решение, трябва $\sin(x + \varphi_0)$ да има единствена стойност в дадения интервал, $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Макар този интервал да е симетричен относно $\frac{\pi}{2}$, заради отместването от φ_0 графиката на лявата страна на $(*)$ е несиметрична част от арка на синусоида (вж. фигурата).



II начин. Разглеждаме функцията $f(x) = 2 \sin x + \cos x$. Нейната производна е $f'(x) = 2 \cos x - \sin x$, която се нулира при $2 \cos x_0 - \sin x_0 = 0$. Съставяме системата

$$\begin{cases} 2 \cos x = \sin x \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{cases}$$

В дадения интервал $\sin x > 0$, а от $2 \cos x = \sin x$ следва, че е необходимо и $\cos x > 0$ за решението x_0 на системата. Замествайки синуса, имаме $\cos^2 x_0 + 4 \cos^2 x_0 = 1$ или $\cos x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sin x_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Очевидно $x_0 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, защото $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$ и е единственият екстремум в този интервал. Тъй като $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ и $f''(x_0) = -2 \sin x_0 - \cos x_0 < 0$, може да установим че при $x \in \left(x_0, \frac{3\pi}{4}\right)$ функцията $f(x)$ намалява, а при $x \in \left(\frac{\pi}{4}, x_0\right)$ тя расте и $f(x_0) = f_{\max} = \sqrt{5}$ (вж. арката от синусоида на фиг.).

До тук (по I или II начин) установихме, че най-голямата стойност на лявата страна на уравнението $(\star)$ е $\sqrt{5}$, а стойностите ѝ в краищата на интервала са: $2 \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ и $2 \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следователно, търсените стойности на параметъра a са интервалът $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ и числото $\sqrt{5}$.

Отговор. 3. $a \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \cup \{\sqrt{5}\}$.

∞ • ∞