

ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ
за завършване на образователно-квалификационна
степен „бакалавър“
за специалността „Математика и информатика“
10 септември 2019 г.

Решете следните задачи:

1. Дадени са функциите $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$ и $g(x) = \sqrt{2 \cdot 3^{x+1} - 9^x} - 5$. Да се докаже, че уравнението $f(x) = g(x)$ има точно един корен. Да се намери този корен.
2. Даден е триъгълник ABC с медиана CC_1 и ъглополовяща CL ($C_1, L \in AB$). Точка M е средата на CC_1 , а точка $Q \in BC$ е такава, че $CQ:QB = 1:2$.
 - а) Да се докаже, че точките A, M и Q лежат на една права p .
 - б) Ако $BC:AC = k$ и $p \cap CL = P$, да се намерят отношенията $CP:PL$ и $PM:AQ$.
3. Нека $0 < p < 1$ и $0 < x < 1-p$.
 - а) Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{p+x}$.
 - б) Да се намери най-малката стойност на функцията $g(p) = \frac{4}{1+p} + \frac{1}{1-p}$.
 - в) Да се докаже, че ако $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$, то $\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}$.

Забележка: Оценката ще бъде оформена върху две от трите дадени задачи. Моля, изберете за решаване онези две задачи, които считате, че може да решите най-добре.

Оценката се пресмята по формулата $K = 2 + 0,2T$, където T е броят на получените точки. За „среден 3“ са необходими поне 5 точки.

Време за работа – 2 часа.