

ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ
За завършване на образователно-квалификационна
степен „бакалавър“
за специалността „Математика и информатика“
9 септември 2017 г.

1. а) Да се докаже, че числото $\sqrt{2017^2 + 2017^2 \cdot 2018^2 + 2018^2}$ е рационално; (4 точки)
- б) Дадена е редицата $a_n = \sqrt{n^2 + n^2(n+1)^2 + (n+1)^2}$, $n = 1, 2, \dots, 2017$.
Да се докаже, че членовете на редицата са естествени числа и да се намери броят на тези от тях, които имат цифра на единиците 1.
(6 точки)
2. В равнина са дадени три окръжности $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$, като всеки две се допират външно в точките P, Q и R и $r_1 + r_2 + r_3 = 12\sqrt{2}$.
- а) Да се докаже, че окръжността k , определена от точките P, Q и R е вписаната в триъгълника $O_1O_2O_3$ окръжност. (3 точки)
- б) Да се изрази радиусът r на окръжността k чрез ъглите на триъгълника $O_1O_2O_3$. (3 точки)
- в) Да се изчисли r , ако $O_1O_2 = O_1O_3$ и $\sin\left(\frac{1}{2}\angle O_2O_1O_3\right) = \frac{1}{3}$. (4 точки)
3. а) Да се построи графиката на функцията $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + x^{-n}}{x^n - x^{-n}}, x > 0$.
(5 точки)
- б) Да се намерят стойностите на параметъра k , за които уравнението $f(x) = x^2 + kx - 1$ има точно два различни реални корена. (5 точки)

Забележка: Оценката ще бъде оформена върху две от трите дадени задачи. Моля, изберете за решаване онези две задачи, които считате, че може да решите най-добре.

Оценката се пресмята по формулата $K = 2 + 0,2T$, където T е броят на получените точки. За „среден 3“ са необходими поне 5 точки.

Време за работа – 2 часа.