

Софийски университет "Свети Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Държавен изпит
за получаване на ОКС "Бакалавър
специалност "Статистика", дата: 10.09.2019 г.

Задача 1. В евклидовото пространство V със скалярно произведение

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

са дадени симетричен линейен оператор $\varphi : V \rightarrow V$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормиран базис f_1, f_2, f_3 на V и ненулев симетричен линейен оператор $\psi : V \rightarrow V$, изпълняващи равенствата $\langle \varphi(u), \psi(v) \rangle = 0$ за произволни вектори $u, v \in V$.

(i) Да се намери ортонормиран базис на V , в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази диагонална матрица D .

(ii) Да се покаже, че:

(а) образът $\text{im } \psi^{10}$ на ψ^{10} съвпада с ядрото $\ker \varphi$ на φ ;

(б) линейните оператори φ и ψ^{10} имат поне един общ собствен вектор.

Задача 2. Нека непрекъснатата случайна величина X е равномерно разпределена в интервала $[0, \beta]$.

(i) Нека случайната величина $Y = \max(X, 2)$. При $\beta = 4$ пресметнете:

(а) $P(Y < 3)$;

(б) математическото очакване на Y ;

(в) дисперсията на Y .

(ii) Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими наблюдения над X . Постройте точкови оценки за параметъра β , като използвате:

(а) метода на моментите;

(б) метода на максималното правдоподобие.