

Софийски университет "Свети Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Държавен изпит
за получаване на ОКС "Бакалавър
специалност "Статистика", дата: 09.07.2019 г.

Задача 1. Пресметнете неопределения интеграл

$$\int \frac{t^3 + t + 2}{(t-1)^2(t^2+1)} dt.$$

Задача 2. Нека X е случайна величина (сл. в.) с разпределение на Поасон с параметър $\lambda_1 > 0$ и Y е сл. в. с разпределение на Поасон с параметър $\lambda_2 > 0$.

(а) Ако X и Y са независими, да се определи разпределението на сл. в. $X + Y$ и условното разпределение на X при условие, че $X + Y = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(б) Нека сл. в. X и Y са с разпределение на Поасон с параметри съответно $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$:

$$X \sim Po(\lambda_1), \quad Y \sim Po(\lambda_2).$$

Намерете дисперсията на сл. в. $X - 2Y$, ако $\rho(X, Y) = 0.7$.

(в) Нека независимите сл. в. X и Y са с разпределение на Поасон с параметри съответно $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 > 0$:

$$X \sim Po(\lambda_1), \quad Y \sim Po(\lambda_2).$$

Намерете дисперсията на сл. в. $X - 2Y$.

(г) Ако X е сл. в. с разпределение на Поасон с параметър $\lambda > 0$, намерете максимално-правдоподобна оценка за параметъра λ . Неизместена ли е и защо?

Упътване: Случайната величина X има разпределение на Поасон с параметър $\lambda > 0$, ако

$$X \sim Po(\lambda), \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

За подусловие (а), използвайте пораждаща функция $\pi_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$ или пораждаща моментите функция $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$.