Тема 25

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Основни теореми на динамиката на материална точка.

Анотация

Основни теореми на динамиката на материална точка.

1. За свободна материална точка:
Теорема за изменение на количеството движение.
Теорема за изменение на момента на количеството на движение и свойства на движението на точка под действие на централна сила. Теорема за изменение на кинетичната енергия. Потенциално силово поле – силови линии, еквипотен-циални повърхнини, потенциална енергия. Теорема за съхранение на пълната енергия (интеграл на енергията).
2. За несвободна материална точка при идеални връзки (без триене):
Изменение (съхранение) на енергията при движение на точка по подвижна (неподвижна) крива в хомогенното поле на силата на тежестта.

1.

Уравненията на Нютон за свободна материална точка са (0) $m\ddot{x} = \bar{F}$, където $\bar{r}(t)$ е вектора положение на материалната точка. $\bar{v}(t) = \dot{\bar{r}}(t)$ е скоростта, а $\bar{a}(t) = \dot{\bar{v}}(t) = \ddot{\bar{r}}(t)$ е ускорението на точката. $\bar{F}(t)$ е сумарната сила, действаща на материалната точка с маса m в момента t. Приемаме масата на точката за постоянна.

<u>Теорема 1.1</u> (за изменение на количеството движение)

В сила е закона

$$(1.1-a)\frac{d}{dt}(m) = ¿$$, за всяко t.

Друг запис на закона е

$$(1.1-b)\, d(m) = ,\, dt$$

Където $\bar{F}(t)$ dt се нарича импулс на силата. Интегрирайки $(1.1-b)$ получаваме

$$(1.1-c)\, m\overset{¿}{v}(t) - m\overset{¿}{v}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \overset{¿}{F}(t)\, dt,$$

От където и идва името на закона – изменението на количеството движение е израза от ляво, $m\overset{¿}{v}(t) - m\overset{¿}{v}(t_0)$.

<u>Доказателство</u>: $\frac{d}{dt}(m) = ¿$ $m\bar{a}(t)$.

В частния случай когато $\overset{¿}{F}(t) = 0$ или $\int_{t_0}^{t} \overset{¿}{F}(t)\, dt = 0$ имаме съхранение на количеството движение, $m\overset{¿}{v}(t) = m\overset{¿}{v}(t_0)$

<u>Дефиниция</u> (централна сила)

Нека на материална точка P действа сила F , чиято големина е функция само на разтоянието r от фиксирана точка O, а посоката и е или същата като на вектора $\overset{¿}{OP},$ или противоположна.

Когато имаме единствена централна сила, слагаме координатното начало във точката, която я причинява.

<u>Теорема 1.2</u> (теорема за момента на количеството движение)

За всяко t е в сила закона

$$(1.2)\ \frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}(t))=\vec{r}\times\vec{F}(t)$$

<u>Доказателство:</u>

Да умножим (0) векторно с $\overline{r}(t)$ и да използваме (1.1-а). Имаме

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v}(t))=\vec{r}\times\vec{F}(t)$$

Но също така е вярно, че

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v}(t))=\vec{v}(t)\times m\vec{v}(t)+\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v}(t))=0+\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v}(t)).$$

В случая, когато $\vec{F}(t)=0$ или $\vec{F}(t)$ е централна следва, че $\vec{r}\times\vec{F}(t)=0$ и следователно $\vec{r}\times m\vec{v}=\vec{r}_0\times m\vec{v}_0=\alpha\vec{\sigma},\ \vec{\sigma}^2=1$, тоест имаме равнинно движение, при което нормалния вектор към равнената е $\vec{\sigma}$. Тази равнина е равнината, определена от векторите ($\vec{r}_0,\vec{v}_0)$. Да припомним, че случая с планетарното движение е приближение на случай с действиве на централна сила Гравитационната сила на Слънцето е приблизително централна(ако се пренебрегнат влиянията на другите планети и неговото движение) и Земята наистина обикаля по равнинна крива – елипса.

<u>Теорема 1.3</u> (теорема за изменение на кинетичната енергия)

За изменението на кинетичната енергия на материална точка, $T=\frac{m\vec{v}^2}{2},$ е в сила

$$(1.3-a)\ \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}^2}{2}=\vec{F}.\vec{v}$$

Записан по друг начин, законът е

$$(1.3-b)\ d\frac{m\vec{v}^2}{2}=\vec{F}.\vec{v}\,dt=\vec{F}.d\vec{r},$$

където $\vec{F}.d\vec{r}$ е елементарната работа на силата F.Използвайки (1.3-b) интегрирайки по част от траекторията на точката : $\overset{\frown}{M_0M}$ получаваме

$$(1.3-c)\ \frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=\int_{\overset{\frown}{M_0M}}\vec{F}d\vec{r},$$

тоест изменението на кинетичната енергия е равно на работата, която F извършва при преместването на точката.

Доказателство:

Да умножим скаларно със скоростта равенството $m\frac{d}{dt}\vec{v}=\vec{F},$ получаваме

$$m\vec{v}.\frac{d}{dt}\vec{v}=\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}^2}{2}=\vec{F}.\vec{v}$$

Дефиниция (стационарно силово поле)

Казваме, че F е стационарно силово поле, ако F зависи само от положението в R^3, т.е. $F=F(x,y,z)$. Силови линии за такова поле са такива криви, допирателните по които са колинеарни със силата F.

Дефиниция (потенциално поле)

Каваме, че стационарно силово поле се нарича потенциално ако съществува потенциална функция за него, т.е.

$$\exists U:R^3\rightarrow R\ че-grad(U)=F$$

Потенциалната функция на полето се нарича и негова потенциална енергия. ГМТ в пространството, в което тази енергия е една и съща представляват повърхнини. Аналитично те имат вида $\{(x,y,z)\vee U(x,y,z)=C\}$. Тези повърхнини носят името еквипотенциални. Потенциалните полета са важни, защото в тях важи закона за запазване на енергията

Теорема 1.4 (ЗЗЕ за свободна точка)

Нека свободна материална точка се намира в потенциално поле F с потенциал U. Тогава сумата на кинетичната и потенциалната енергия на точката е константа,

$$\frac{m\vec{v}^2}{2} + U(x,y,z) = Const$$

<u>Доказателство:</u>

От (1.3-а) имаме, че изменението на кинетичната енергия е $\frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}^2}{2} = \vec{F}.\vec{v}$. Да

заместим : $\vec{F}.\vec{v} = -gradU.\vec{v} = -(U_x\dot{x}(t) + U_y\dot{y}(t) + U_z\dot{z}(t)) = \frac{-d}{dt}U(x(t), y(t), z(t))$

Следователно $\frac{m\vec{v}^2}{2} + U(x,y,z) = Const$.

2.

Нека точка се движи в хомогенното поле на силата на тежестта по променлива крива. Това движение е несвободно и точката има само 1 степен на свобода. Кривата описваме като пресечница на две повърхнини във всеки един момент

$$\Gamma : \left| \begin{array}{l} f_1(x,y,z,t) = 0 \\ f_2(x,y,z,t) = 0 \end{array} \right.$$

Потенциалната функция на силата на тежестта е $U = \frac{-\gamma mM}{|\vec{r}|}$. Да построим нормали към повърхнините, описващи кривата Г. Те са $gradf_1, gradf_2$. Реакциите към двете повърхнини са съответно $N_i = \lambda_i(\frac{\partial f_i}{\partial x}, \frac{\partial f_i}{\partial y}, \frac{\partial f_i}{\partial z}), i = 1,2$. И така, петте уравнения, които описват движението на несвободната точка са

$$(1-3)\; m\vec{a} = \vec{F} = -\gamma\frac{mM\vec{r}}{|\vec{r}|^3} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2$$

$$(4)\; f_1(\vec{r}(t), t) = 0$$

$$(5)\; f_2(\vec{r}(t), t) = 0$$

Да диференцираме (4) и (5) по t: $\frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial f_i}{\partial y}\dot{y}(t) + \frac{\partial f_i}{\partial z}\dot{z}(t) = 0$.

Ако се абстрахираме от (4) и (5), според теорема 1.3,

$$\text{¿}\, r \vee \text{¿}\, . \overset{\text{¿}}{v} + \lambda_1 gradf_1 . \overset{\text{¿}}{v} + \lambda_2 gradf_2 . \overset{\text{¿}}{v}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{m \overset{\text{¿}}{v}^2}{2} = \left(\overset{\text{¿}}{G} + \overset{\text{¿}}{N_1} + \overset{\text{¿}}{N_2}\right) . \overset{\text{¿}}{v} = -grad\frac{-\gamma mM}{\text{¿}}$$

От диференциранията, които извършихме имаме, че $gradf_i . \overset{\text{¿}}{v} = \frac{\partial}{\partial t} f_i$

Ако кривата, по която се движи точката е постоанна, то $\frac{\partial}{\partial t} f_i = 0$ и следователно закона за запазване на енергията ще е същия, както и при свободна точка,

$$\text{¿}\, r \vee \text{¿} = Const$$

$$\frac{m \overset{\text{¿}}{v}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{\text{¿}}$$

Ако кривата, по която се движим не е константа, то закона за запазване е

$$d\frac{m \overset{\text{¿}}{v}^2}{2} = \overset{\text{¿}}{F} . d\overset{\text{¿}}{r} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial t} dt + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial t} dt$$

Ако все пак λ_1, λ_2 са константи, то закона ще е

$$\text{¿}\, r \vee \text{¿} - \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2 = Const$$

$$\frac{m \overset{\text{¿}}{v}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{\text{¿}}$$

Забележка: Чрез λ_1, λ_2 се определят големините на рекциите на опирите. Те се намират чрез интегриране на уравнения (1-5) (които са с пет неизвестни: x, y, z, $\lambda_1, \lambda_2 \text{¿}$.

Литература.
[1] Записки по Математически методи във физиката, изборен, Евгени Христов.
[2] Аналитична механика , Лилов

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.