Тема 24

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.

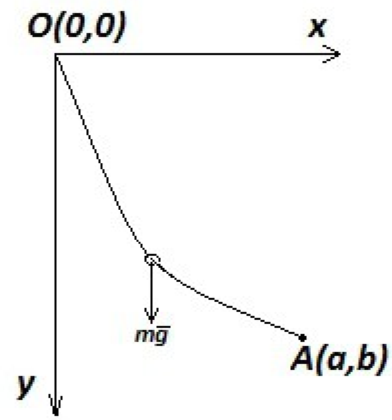
Анотация

Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.

Постановка на задачата за брахистохроната като задача за най-бързо преместване на несвободна материална точка в потенциално силово поле (хомогенното поле на силата на тежестта) по предварително неизвестна крива. Интеграл на енергията. Интерпретация на задачата като вариационна задача за екстремум на функционал. Извод на уравнението на Ойлер като необходимо условие за екстремум на функционала. Основна лема на вариационното смятане. Циклоидата като решение на задачата за брахистохроната.

Задачата за брахистохроната датира от 1696, когато Йохан Бернули я поставя пред Ойлер. Името „брахистохрона“ идва от гръцки и приблизително означава „най- бързо време“. Постановката е следната:

Във вертикална равнина от дадена точка се пуска пръстенче по нишка до друга точка в тази равнина с нулева начална скорост. Коя е кривата (каква трябва да е формата на нишката), за която пръстенчето ще стигне до втората точка за най- кратко време?



Математическа идеализация: В координатна система е Oxy точка O(0,0) е свързана с точка A(a,b) посредством гладка крива. По кривата се пуска материална точка с нулева начална скорост, която под действие на силата на тежеста стига до т. A. Триенето се пренебрегва.Каква е кривата, по която това ще стане за най- кратко време?

За да улесним сметките ще смятаме, че a=b=1 , което отговаря на мащабиране на координатната система, относно което физическите закони са инвариантни.

Полето, създадено от гравитационната сила е потенциално и потенциалната функция в нашия случай е $V=-mgy$. Силата, която действа на точката е само по y : $\vec{F}=(0,mg)$. От това, че V е потенциал имаме, че $-gradV=\vec{F}$.

Точката(пръстенчето) се движи по крива $(x(t),y(t))$ със скорост $\vec{v}=(\dot{x}(t),\dot{y}(t))$.

Тъй като за потенциална сила е в сила закона за залазване на енергията, имаме

$$V+\frac{m\vec{v}^2}{2}=Const$$

Тази константа намираме от началното условие:

$$(1)\ \frac{m\vec{v}^2}{2}-mgy=\frac{m\ (\vec{v}_0^2)}{2}-mgy_0=0$$

Задачата за брахистохроната се решава на две стъпки:

1) Изразява се времето за пристигане до точката ако кривата е фиксирана
2) Получения израз се минимизира по всевъзможните криви

За дължината на кривата в момента t (дължината на изминатия път) имаме

$$s=\int_0^t\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

$$(2)\, ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx=\sqrt{1+y'(x)^2}\, dx$$

От друга страна имаме, че $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$, следователно от $ds=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$ получаваме, че $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=v^2=2gy$. Имаме, че $ds\overset{(2)}{=}\sqrt{2gy}\, dt\overset{(1)}{=}\sqrt{1+y'(x)^2}\, dx$

От последното равенство можем да изразим dt:

$$dt=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx$$

Нека T е времето за пристигане. Да интегрираме последното равенство по дъгата OA - dx се изменя от 0 до 1, dt – от 0 до T.

$$T[y]=\int_0^1 \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\, dx$$

Получихме времето за пристигане в зависимост от кривата (функционал от y(x)).
По този начин сведохме задачата за брахистохроната до задача за минимизиране на функционал- основната задача на вариационното смятане.

Преди да продължим с решаването на задачата за брахистохроната, ще формулираме и докажем основен резултат от вариационното смятане, отнасящ се до уравненията на Лагранж. Преди това ще докажем

Лема

Нека f е непрекъсната в [a, b] . Тогава ако

$$\forall \eta \in C^2[a,b],\ че\ \eta(a)=\eta(b)=0\ следва \int_a^b \eta(x) f(x)\, dx=0,\ то\ f(x) \underset{x\in[a,b]}{\equiv} 0$$

Доказателство:

Допускаме, че съществува $x_0 \in [a,b] : f(x_0)\neq 0$. От непрекъснатостта следва, че f има цял симетричен интервал на ненулевост и еднознаковост:

$$\exists \delta>0 : \forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \Rightarrow f(x)\neq 0$$

При това, това δ можем да изберем толкова малко, че тази околност да е подинтервал на [a, b]. Да конструираме функцията

$$\eta_{x_0}(x)=\begin{cases} 0, a\le x\le x_0-\delta \\ (x-(x_0-\delta))^2(x-(x_0+\delta))^2, x_0-\delta\le x\le x_0+\delta \\ 0, x_0+\delta\le x\le b \end{cases}$$

Но поради избора на η_{x_0} имаме, че интегралът

$$\int_a^b \eta\ (x) f\ (x) dx=\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\eta_{x_0}(x) f\ (x) dx$$

е или строго положителен, или строго отрицателен, което е противоречие.

<u>Теорема</u> (Ойлер-Лагранж, едномерен случай)

Нека разглеждаме функците $y\epsilon C^1[a,b]$ и да разгледаме функционала

$I[y]=\int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx$ при положение че са фиксирани крайщата:

$y(a)=A, y(b)=B$.

Тогава y(x), за което имаме екстемум на този функционал е решение на уравнението на Ойлер

$$(¿)\, F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$

<u>Доказателство (Лагранж)</u>

Нека имаме екстемум $\underset{y}{extr}\, I[y]=I[\overset{¿}{y}]$. Да дефинираме функцията на една реална

променлива $f(\epsilon)=I[\overset{¿}{y}+\eta\epsilon],$ където η е такава функция, както в Лема. Ясно е, че

$$f(\epsilon)=I\left[\overset{¿}{y}+\eta\epsilon\right]\le I\left[\overset{¿}{y}\right]=f(0)\ или$$

$$f(\epsilon)=I\left[\overset{¿}{y}+\eta\epsilon\right]\ge I\left[\overset{¿}{y}\right]=f(0)\ или$$

за достатъчно малки ϵ . Следователно f има екстремум в 0 и следователно

$$\frac{df}{d\epsilon}¿_{\epsilon=0}=\left(\frac{d}{d\epsilon}\int_a^b F\left(x,\overset{¿}{y}(x)+\epsilon\,\eta(x),\overset{¿}{y}'(x)+\epsilon\,\eta'(x)\right)dx\right)¿_{\epsilon=0}=0$$

Забелжка : пишем

Производната влиза под знака на интеграла и имаме

$$\int_a^b F_x 0 + F_{¿y}\eta(x) + F_{¿y'}\eta'(x)\,dx = \int_a^b F_{¿y}\eta(x) + F_{¿y'}\eta'(x)\,dx = 0$$

Да пресметнем $\int_a^b F_{¿y'}\eta'(x)\,dx = \int_a^b F_{¿y'}\,d\eta(x) = F_{¿y'}(x)\,\eta(x)¿_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \eta(x)\frac{d}{dx}F_{¿y'}\,dx$

Следователно $\int_a^b \left(F_{¿y} - \frac{d}{dx}F_{¿y'}\right)\eta(x)\,dx = 0$. Но това е вярно за всяко η от предположенията на Лемата. Следователно по нея получаваме, че

$$F_{¿y} - \frac{d}{dx}F_{¿y'} = 0$$

Забележка: „Вариационноста“ тук се изразява във варирането на функцията $\overset{¿}{y}$ с блзките до нея $\overset{¿}{y} + \eta\epsilon$.

<u>Следствие:</u>

Ако в теоремата на Ойлер- Лагранж функцията F не зависи явно от x, то

$$F - y'F_{y'}$$

е пръв интеграл на (*).

<u>Доказателство:</u>

Нека y е решение на (*). Да диференцираме израза $F - y'F_{y'}$ по x:

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = F_y y' + F_{y'}y'' - y''F_{y'} - y'\frac{d}{dx}F_{y'} = y'\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) = y'0 = 0$$

Следователно върху всяко решение на (*) $F - y'F_{y'}$ е константа, което е и дефиницията на пръв интеграл.

Да се върнем към решаването на задачата за брахистохроната, имаме да минимизираме функционала

$$T[y] = \int_0^1 \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

При положение, че $y(0)=0, y(1)=1$. Ако запишем уравнението на Ойлер за този функционал, то ще е от втори ред. За това ще използваме следствието и ще тръгнем да решаваме ОДУ-то за y от първия интеграл. За целта трябва да пресметнем

$$\left(\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\right)_{y'}=\frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{2y'}{2\sqrt{1+(y')^2}}=\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+(y')^2)}}$$

Уравнението, което трябва да решим е

$$\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}-y'\frac{y'}{\sqrt{2gy(1+(y')^2)}}=C,$$

Което е еквивалентно на $C^2=\frac{1}{2gy(1+(y')^2)}$. Да означим $2gC^2=D$

За y' получаваме $(3)\,y'=\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{1-Dy}{Dy}}$, понеже $y'>0.$ Проверява се, че $1-Dy>0.$

Ще направим следния трик: трансформираме уравнението (3) по следния начин:

$$(4)\,dx=\sqrt{\frac{Dy}{1-Dy}}\,dy$$

След интегриране получаваме $Q+x=\int\sqrt{\frac{Dy}{1-Dy}}\,dy\overset{z=Dy}{=}\frac{1}{D}\int\sqrt{\frac{z}{1-z}}\,dz$

Да положим $u=\sqrt{\frac{z}{1-z}}$, $z=\frac{u^2}{1+u^2}$; $dz=\frac{1}{(1+u^2)^2}\,du$. Получаваме

$$x+Q=\int\frac{2u^2}{(1+u^2)^2}\,du=\int\frac{u\,d(1+u^2)}{(1+u^2)^2}=-\int u\,d\frac{1}{(1+u^2)}=\frac{-u}{1+u^2}+\arctan(u)$$

Да се върмем към променливата y:

$$x+Q=\frac{-\sqrt{\frac{Dy}{1-Dy}}}{1+\frac{Dy}{1-Dy}}+\arctan\left(\sqrt{\frac{Dy}{1-Dy}}\right),2gC^2=D$$

Константите Q и D (или Q и C) се определят от началните условия. За да параметризираме кривата, която получихме да положим $Dy=\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, но преди това да опростим

$$\frac{-\sqrt{\frac{Dy}{1-Dy}}}{1+\frac{Dy}{1-Dy}}=\frac{-\sqrt{\frac{Dy}{1-Dy}}}{\frac{1}{1-Dy}}=-\sqrt{Dy(1-Dy)}$$

$$x+Q=\sqrt{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}+\arctan\left(\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)=\frac{sint}{2}+\frac{t}{2}$$

t=0 отговаря на y=0 и понеже y=0 => x=0 следва, че Q=0. Получихме параметризация

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{sint}{2}+\frac{t}{2} \\ \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Междудругото, $t=\frac{\pi}{2}$ отговаря на $\begin{pmatrix} x\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Следователно $D=\frac{\pi}{2}$

Краивата, която получихме е циклоида.

Забележка: С червено съм означил текста, който евентуално може да се пропусне ако няма време или знания. Накрая има и грешка с константите

Литература.

[1] Записки по Математически методи във физиката, изборен, Евгени Христов.

[2] Аналитична механика , Лилов

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.