Тема 19

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Непрекъснати разпределения: 1. Равномерно разпределение. 2. Експоненциално разпределение. 3. Гама разпределение.4. Бета разпределение.5. Нормално разпределение.Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

Анотация

Непрекъснати разпределения: 1. Равномерно разпределение. 2. Експоненциално разпределение. 3. Гама разпределение.4. Бета разпределение.5. Нормално разпределение.Задачи, в които възникват. Моменти – математическо очакване и дисперсия.

Описват се моделите, водещи до съответните разпределения..Пресмятат се моментите на разпределенията до втори включително. Описват се връзките между разпределенията – експоненциално и гама, нормално и гама, гама и бета. При изчисленията може да се използват и характеристични функции, но това не е задължително.

Дефиниция 1.1 (функция на разпределение)

Нека е дадена едномерна случайна величина ξ. Функция на разпределение на ξ реалнозначна функция $F: R \to [0,1]$, която за дадено реално x намира вероятността $\xi < x$, т.е.

$F_\xi(x) = P(\{\omega \vee \xi(\omega) < x\}) = P(\xi < x)$

Дефиниция 1.2 (плътностна функция, непрекъснато разпределение)

Нека е дадена едномерна случайна величина ξ с функция на разпределение $F: R \to [0,1]$. Ако същестествува функция $f_\xi(x): \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x)\,dx = F_\xi(x)$, то тя се нарича плътностна функция за ξ и е вярно $f_\xi(x) = F_\xi{}'(x)$. Ако за ξ е вярно, че $F_\xi(x)$ е непрекъсната, то казваме, че ξ има *непрекъснато разпределение.* Ако съществува $f_\xi(x)$, то ξ е абс. непрекъсната.

Дефиниция 1.3 (мат. очакване на непрекъсната сл. в., централни моменти)

Нека ξ е с непрекъснато разпределение. Интегралът (ако съществува),

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx,$$

се нарича математическо очакване. Интегралът (ако съществуват)

$$E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^k f_\xi(x)\,dx$$

се нарича k-ти централен момент на ξ. Централния момент с ред 2 наричаме дисперсия на ξ, а корен от него средно отклонение.

1. **Равномерно разпределение**

Нека X е случайна променлива, която принадлежи на интервала [a,b]. Казваме, че X е разпределена равномерно, ако плътността на разпределението й е постоянна. Задачите, от които произлизат равномерни разпределения са такива, в които някаква физична величина заема равновероятно стойности в даден интервал.

Имаме. $f_\xi(x)=\begin{cases} Const,\ x\epsilon[a,b] \\ 0,\ x\epsilon(-\infty;a)\bigcup(b;+\infty)\end{cases}$. Ще намерим тази константа от условието

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)\,dx=1=\int_a^b C\,dx=Const(b-a)$$

Получихме, че $f_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a},\ x\epsilon[a,b] \\ 0,\ x\epsilon(-\infty;a)\bigcup(b;+\infty)\end{cases}$, $F_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a},\ x\epsilon[a,b] \\ 0,\ x\epsilon(-\infty;a) \\ 1,\ x\epsilon(b;+\infty)\end{cases}$,

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{b+a}{2}$$

За дисперсията, $D\xi,$ имаме

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2 f_\xi(x)\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2 dx=\frac{\dfrac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}}{b-a}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

2. Експоненциално разпределение

Разглеждаме последователност от независими, случайни събития, напр. поредица от радиоактивни разпадания в един радиоактивен образец. Интервалите от време t между две последователни събития са случайни величини, които са разпределени по експоненциален закон. Основният параметър, който дефинира разпределението, е средният брой събития за единица време λ. Такава последователност се описва от непрекъсната сл. в. със плътностна функция $f_\xi(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t},\ t>0 \\ 0,\ t\leq 0\end{cases}$. Съответно функцията на разпределение е

$F_\xi(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t},\ t>0 \\ 0,\ t\leq 0\end{cases}$. Да намерим очакването и дисперсията:

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} t f_\xi(t)\,dt=\int_0^{+\infty} t\lambda e^{-\lambda t}\,dt=-\int_0^{+\infty} t\,d e^{-\lambda t}=¿$$

$$¿-t e^{-\lambda t}¿_{t=0}^{t=+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t}\,dt=\frac{-1}{\lambda}e^{-\lambda t}¿_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2 f_{\xi}(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt=\text{¿}$$

$$\text{¿}\int_{0}^{+\infty}t^2\lambda e^{-\lambda t}\,dt-\frac{2}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}t\lambda e^{-\lambda t}\,dt+\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda t}\,dt=\text{¿}$$

$$\text{¿}-\int_{0}^{+\infty}t^2\,d e^{-\lambda t}-\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=-t^2e^{-\lambda t}\text{¿}_{t=0}^{t=+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda t}2t\,dt-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda}\left(\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

3. Гама разпределение

Двупараметрично непрекъснато разпределение, чиято плътностна функция е скалирана и нормирана гама функция се нарича гама разпределение. Имаме

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Да припомним, че $\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$. С гама разпределение се описва например количеството събани валежи в контейнер от началото на валеж до края.

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\xi}(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dx=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}e^{\frac{-x}{\beta}}\,dx\overset{\beta y=x}{=}\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}y^{(\alpha+1)-1}e^{-y}\,dy=\frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\overset{\text{свойство на }\Gamma(\alpha)}{=}\alpha\beta$$

$$(x-\alpha\beta)^2\frac{x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dx=\text{¿}$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2 f_{\xi}(x)\,dx=\int_{0}^{+\infty}\text{¿}$$

$$\text{¿}\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha+1}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\,dx-2\alpha\beta(\alpha\beta)+(\alpha\beta)^2.(1)=-(\beta\alpha)^2\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha+1}e^{\frac{-x}{\beta}}\,dx\overset{\beta y=x}{=}\text{¿}$$

$$\text{¿}-(\beta\alpha)^2+\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{+\infty}y^{(\alpha+2)-1}e^{-y}\,dy=-(\beta\alpha)^2+\frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)=\text{¿}$$

$$¿\beta^2 \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} - (\beta\alpha)^2 = \beta^2 (\alpha+1)\,\alpha - (\beta\alpha)^2 = \alpha\beta^2$$

4. **Бета разпределение**

Бета разпределена сл.в. е такава, чиято плътностна функция е

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, x\epsilon[0,1] \\ 0, \textit{иначе} \end{cases}$$

Да припомним, че $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Ще използваме последното равенство за да изчислим средното:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\,dx = \frac{B(\alpha+1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha+1,\beta)}\,dx = ¿ \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2;$$

$$\frac{x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha+2,\beta)}\,dx = ¿$$

$$E\xi^2 = \int_0^1 \frac{x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}\,dx = \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 ¿$$

$$¿ \frac{B(\alpha+2,\beta)}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \frac{x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha+2,\beta)}\,dx = \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = ¿$$

$$¿ \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}} = \frac{(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}.$$

Следователно за $D\xi$ получаваме

$$D\xi = \frac{(\alpha+1)\,\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+1} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right] = ¿$$

$$¿\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta+\alpha-\alpha^2-\alpha\beta-\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\right]=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(1+\alpha+\beta)}$$

5. Нормално разпределение

Нормално разпределена сл.в. с параметри μ,σ^2 наричаме такава ξ, за която

$$f_\xi(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Бележим $\xi \epsilon N(\mu,\sigma^2)$. Нормалното разпределение е най- важното от всички разпределения поради централната гранична теорема, според която разпределението на нормираното средно на достатъчно голям брой независими сл.в. с крайни очаквания и дисперсии е приблизително нормално. Ще докажем, че $E\xi=\mu, D\xi=\sigma^2$.

$$E\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-\mu+\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=¿$$

$$¿\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y e^{\frac{-y^2}{2}}dy+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}¿_{y=-\infty}^{y=+\infty}}{\sqrt{2\pi}}+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-y^2}{2}}dy=¿$$

$$¿0+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\mu$$

$$D\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E\xi)^2 f_\xi(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$¿\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 e^{\frac{-y^2}{2}}dx, \text{ и да направим смяната } y=\frac{x-\mu}{\sigma}.$$

$$D\xi=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}y\,d e^{\frac{-y^2}{2}}=\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}y e^{\frac{-y^2}{2}}¿_{y=-\infty}^{y=+\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-y^2}{2}}dy=0+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}=\sigma^2$$

Връзки между разпределенията
експоненциално и гама, нормално и гама, гама и бета.

Тема 19

1. Връзка между екксpоненциално и гама разпределение.

Да положим в функцията на разпределение на Γ : $f_\xi(x;\alpha,\beta)=\frac{x^{1-\alpha}e^{\frac{-x}{\beta}}}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}$,

$\alpha=1,\frac{1}{\beta}=\lambda>0$. Получаваме експоненциално разпределение с коефициент λ .

Също така, сума на k експоненциални разпределения с коефициент λ има

разпределение $\Gamma(k,\frac{1}{\lambda})$

2. Връзка между бета и гама разпределение има заради връзка между самите функции бета и гама, а следователно и между плътностните функции

$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

Също така ако сл. в. $q_{1,2} \sim \Gamma(a_{1,2}, 1)$ то частните $\frac{q_{1,2}}{q_1+q_2}$ има разпределение B (a_1,a_2)

3. Връзка между нормално и гама: Ако в гама разпределение положим $\alpha=\frac{v}{2},\beta=2$

   получаваме $\chi^2(v)$ разпределение, което пък се получава като сума на v квадрата на стандартно-нормално разпределени

Забележка: Темата я има развита и от доц. Матеев

Литература

[1] Вероятности и Статистика, университетско издателство
[2] Записки по ТВМС, спец ПМ, Д. Дончев

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.