Тема 18

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Диференциална форма на теоремата на Кун и Такер

Анотация

Диференциална форма на теоремата на Кун и Такер

Разглеждаме задачата

$$(P)\left|\begin{array}{l}\min\ f(x)\\ g_i(x)\le 0,\quad i=1,2,\dots,m\\ <c_l,x>=d_l,\quad l=1,..,s\\ x_j\ge 0,\quad j\in J\subseteq\{1,..,m\}\end{array}\right.$$

с функция на Лагранж

$$\Lambda(x,\lambda,v)=f(x)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)+\sum_{l=1}^{s}v_l(¿c_l,x>-d_l),$$

Която е дефинирана в $+¿^m\times R^s, X=\{x\epsilon R^n\vee\forall j\epsilon J: x_j\ge 0\}$ $D=X\times R_¿$

Дефиниция: (Условие на Слейтър за (P))

Казваме, че за (P) е изпълнено условието на *Слейтър*, ако същесвува точка x_0, удовлетворяваща всички условия на задачата, такава че за всички i, за които g_i не е афинна следва, че $g_i(x_0)<0$ (неравенството е изпълнено строго).

<u>Теорема 1.</u> (Теорема на Кун и Такър за (P) – общ случай)

Нека функциите $f,\{g_i\}_{i=1}^{m}$ са изпъкнали в X. Нека е изпълнено условието на Слейтър. Тогава ако $x^¿$ е решение на задачата (P), то съществуват вектори $+¿^m, v^¿\epsilon R^s$ $\lambda^¿\epsilon R_¿$, такива че ($x^¿,\lambda^¿,v^¿$) е седлова точка за Λ, т.е.

$$+¿^m\times R^s:\Lambda(x^¿,\lambda,v)\overset{(1)}{\le}\Lambda(x^¿,\lambda^¿,v^¿)\overset{(2)}{\le}\Lambda(x,\lambda^¿,v^¿)$$
$$\forall(x,\lambda,v)\epsilon X\times R_¿$$

<u>Твърдение</u> (характеризация на изпълналите функции)

Нека $Y\subset R^n$ е непразно, изпъкнало и отворено множество и $f:Y\to R$ е диференцируема във всяка точка от Y. Тогава следните са еквивалентни:

$(1)\, f\, е\, изпъкнала\, в\, Y$

$(2)\, f(y)\ge f(x)+¿f'(x), y-x¿,\ за\, всеки\, x,y\epsilon Y$

<u>Теорема 2.</u> (Диференциална форма на теоремата на Кун и Такър)

Нека функциите $f, \{g_i\}_{i=1}^{m}$ са изпъкнали в X. Нека е изпълнено условието на Слейтър.Нека x е точка и $f, \{g_i\}_{i=1}^{m}$ са диференцируеми в нея. Тогава необходимо и досатъчно условие тази точка x да е решение на задачата е:

„Съществува вектор $\lambda \epsilon R_{¿}^{+¿^m}$ и вектор $v \epsilon R^s$, за които са верни следните 8 условия:

$$(x1)\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}=0, j \notin J$$

$$(x2)\frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} \geq 0, j \epsilon J$$

$$(x3)\, x_j \geq 0, j \epsilon J$$

$$(x4)\, x_j \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j}=0, j \epsilon J$$

$$(\lambda 1)\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_j} \leq 0, j=1,..,m$$

$$(\lambda 2)\, \lambda_j \geq 0, j=1,..,m$$

$$(\lambda 3)\, \lambda_j \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_j}=0, j=1,..,m$$

$$(v1)\frac{\partial \Lambda}{\partial v_l}=0, s=1,..,s$$ “

<u>Доказателство:</u>

(=>)Нека $x^{¿}$ е решение на задачата. От общата теорема на Кун и Такър следва, че съществуват вектор $\lambda^{¿} \epsilon R_{¿}^{+¿^m}$ и вектор $v^{¿} \epsilon R^s$, за които ($x^{¿}, \lambda^{¿}$, $v^{¿}¿$ е седлова за Λ, т.е.

$$+¿^m \times R^s : \Lambda(x^{¿}, \lambda, v) \overset{(1)}{\leq} \Lambda(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}) \overset{(2)}{\leq} \Lambda(x, \lambda^{¿}, v^{¿})$$
$$\forall (x, \lambda, v) \epsilon X \times R_{¿}$$

От (2) следва, че в $X, \Lambda(x, \lambda^{¿}, v^{¿})$ има минимум(в частност локален екстремум) в т. $x^{¿}$. Но понеже Λ е фиференцируема, то веднага следва, че $\Lambda_{x_j}(x, \lambda^{¿}, v^{¿}) = 0$, за всички x, от което следват (x1),(x2),(x4). (x3) следва от самия факт, че сме в X.

От (1) пък следва, че $\lambda^{¿}, v^{¿}$ е глобален максимум на $\Lambda(x^{¿}, \lambda, v)$ в $\underset{R_{¿}}{+¿^{m} \times R^{s}}$.

Понеже Λ е диференцируема, то следва, че $\Lambda_{\lambda_j}(x, \lambda^{¿}, v^{¿}) = \Lambda_{v_s}(x, \lambda^{¿}, v^{¿}) = 0$ за всички λ_j и v_s. От тук веднага следват ($\lambda 1 - 3¿$ и $(v1)$.

(<=) Нека за точка $x^{¿}$ съществуват векторите $\lambda^{¿}, v^{¿}$, за които са изпълнени условията (x1-4), ($\lambda 1 - 3¿$ и $(v1)$.

Ще докажем първо (2): Понеже функцията $\Lambda(x, \lambda^{¿}, v^{¿})$ е изпъкнала по x. Тогава имаме неравенството $\Lambda(x, \lambda^{¿}, v^{¿}) \geq \Lambda(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}) + ¿ L'_x(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}), x - x^{¿} >,$ където вектора $L'_x(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿})$ е градиента на Λ в $(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿})$.

От (x3) знаем, че $x^{¿}$ е от X .От (x1) и (x4) следва, че < $L'_x(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}), x^{¿} > ¿$ =0. От (x2) и (x3) следва, че < $L'_x(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}), x > \geq 0$ за $x \epsilon X$. Следователно

$$\forall x \epsilon X : \Lambda(x, \lambda^{¿}, v^{¿}) \geq \Lambda(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}) + ¿ L'_x(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}), x > \geq \Lambda(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}),$$

с което доказахме (2).

Имаме, че функцията $\Lambda(x^{¿}, \lambda, v)$ е линейна по λ, v в $\underset{R_{¿}}{+¿^{m} \times R^{s}}$. Следователно там е в сила представянето $\Lambda(x^{¿}, \lambda, v) = \Lambda(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}) + ¿ L'_{\lambda}, \lambda - \lambda^{¿} > + ¿ L'_v, v - v^{¿} > ¿$

От $(v1)$ следва, че $¿ L'_v, v - v^{¿} > ¿$ =0. От $(\lambda 3)$ следва, че $¿ L'_{\lambda}, \lambda^{¿} \geq 0$. От $(\lambda 1), (\lambda 2)$ следва, че $¿ L'_{\lambda}, \lambda > ¿$ ≤ 0 . Следователно

$$+¿^{m} \times R^{s} : \Lambda(x^{¿}, \lambda, v) \leq \Lambda(x^{¿}, \lambda, v) - ¿ L'_{\lambda}, \lambda - \lambda^{¿} \geq \Lambda(x^{¿}, \lambda^{¿}, v^{¿}),$$
$$\forall (\lambda, v) \epsilon R_{¿}$$

С което доказахме и (1).

Литература:

[1] Записки по МО2, спец. ПМ, Н. Златева.

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.