# Тема 16

# Държавен изпит

## специалност

## Приложна математика

**Квадратурни формули на Нютон – Коутс и Гаус**

# Анотация

## Квадратурни формули на Нютон – Коутс и Гаус.

1. Дефиниции на понятията: а) *квадратурна формула* и *грешка* на квадратурна формула; б) *възли* и*коефициенти* на квадратурна формула; в) *интерполационна* квадратурна формула. Доказателство, че една квадратурна формула с $n$+1 възела е интерполационна тогава и само тогава, когато е точна за всеки алгебричен полином от степен $\leq n$.
2. *Елементарни* квадратурни формули: на *правоъгълниците*, на *трапците* и на *Симпсън* заедно с израз за грешката им. Геометрична интерпретация. Извод на грешката при *съставната* формула на*правоъгълниците*.
3. Дефиниции на понятията: а) *алгебрична степен на точност* (АСТ) на квад-ратурна формула с тегло; б) алгебричен полином от степен $n$, *ортогонален* в [$a$, $b$] с тегло $\mu$ на всички алгебрични полиноми от степен $n$ –1; в) квадратурна формула на *Гаус* (с тегло). Доказателство, че за всяко естествено $n$ съществува единствена квадратурна формула на Гаус, за която АСТ е 2$n$ – 1, и нейните възли са нулите на полинома от степен $n$, ортогонален в [$a$, $b$] с тегло $\mu$ на всички алгебрични полиноми от степен $n$ – 1. Оценка за грешката на квадратурна формула на Гаус.

**1.**

**Постановка на численото интегриране**. Трябва да пресметнем интеграл (определен) от функция. Често такива интеграли не могат да се пресметнат, затова се налага приближено смятане. Обикновено функцията f, от която искаме да пресметнем определен интеграл се заменя с някакво приближение $\phi$, а грешката на приближение е функцията r. При това интеграла от $\phi$ се пресмята лесно - $\phi$ е например интерполационен полином.

$f=\phi+r$

След като сме направили приближението, заменяме стойността на $\int_D f$ с $\int_D \phi$. Грешката, която правим е $\int_D r$. Друг подход (квадратурен) е да търсим приближение на $\int_D f$ във вида $\sum_{x_i \epsilon D} A_i f(x_i)+R(f)$, където $R(f)$ е грешка, която има вида на функционал.

Ще се интересуваме само от едномерни интеграли от вида $\int_a^b f(x)\,dx$.

**Дефиниция 1.1** Казваме, че правило от вида

$$(1)\ I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k) := Q(f),$$

която на интеграл съпоставя линейна комбинация от стойности на функцията в интервала на интегриране, е *квадратурна формула*. $\{C_k\}_{k=0}^n$ са *коефициенти* на квадратурната формула, $\{x_k\}_{k=0}^n$ са *възли* (множество от точки в интервала [a, b]).Разликата $R(f)=I(f)-Q(f)$ е *грешка* на квадратурната формула. Ако $R(f)=0$ казваме, че фомулата е *точна*.

**Дефиниция 1.2** Казваме, че формулата (1) е интерполационна, ако се получава чрез интерполационен полином. По- точно, нека $L_n(f,x)$ е интерполаицонен полином, който интерполира f във възлите $\{x_k\}_{k=0}^n$. Тогава $Q(f)=\int_a^b L_n(f(x),x)\,dx$ и последното ще се представи като линейна комбинация на функционални стойности.

Например, ако $L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\, l_{k,n}(x)$, то

$$Q(f)=\int_a^b L_n(f(x),x)\,dx=\sum_{k=0}^{m} f(x_k)\int_a^b l_{k,n}(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k),$$

Където (2) $C_k=\int_a^b l_{k,n}(x)\,dx$ Тоест една формула (1) е интерполационна, ако се дава с формулите (2)

**Теорема 1.1**

Една квадратурна формула с *n*+1 възела е интерполационна тогава и само тогава, когато е точна за всеки алгебричен полином от степен $\leq$ *n*.

Доказателство:

(=>)Нека (1) е интерполационна. Нека $f\epsilon\,\pi_n$ е полином от степен n. Имаме, че интерполационния полином с n+1 възли на полином от степен n съвпада сс самия полином, т.е. $L_n(f,x)=f$ . Но тогава формулата е точна: $R(f)=\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx=0$ .

(<=)Нека за всеки алгебричен полином от степен n, $f\epsilon\,\pi_n$ ,формулата (1) е точна. В такъв случай тя ще е точна и за полиномчетата $\{l_{k,n}(x)\}_{k=0}^{n}$ . Имаме

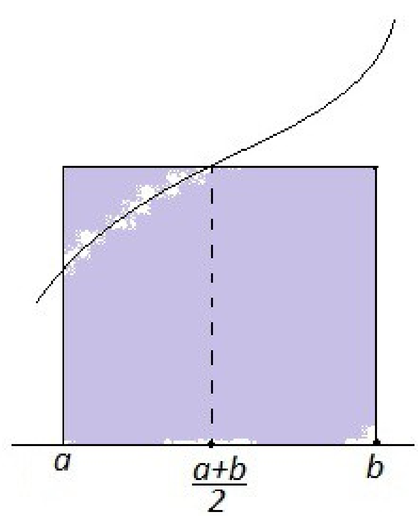
$$k=0,1,..,n:\int_a^b l_{k,n}\,dx\overset{\text{точна}}{=}\sum_{j=0}^{n} C_k l_{j,n}(x_j)=\sum_{j=0}^{n} C_k\delta_{kj}=C_k$$

Следователно са в сила формулите (2), тоест (1) е интерполационна.

## 2.

*Припомняне*: При интерполация с полином е в сила следното равенство за грешката : $f(x)-L_n(f,x)=f[x_0,x_1,\dots,x_m,x]\,\omega(x)$ , където $f[x_0,x_1,\dots,x_m,x]$ има смисъл на разделена разлика, а $\omega(x)=(x-x_0)..(x-x_n)$ .

### 2.1 Формула на правоъгълниците.



Имаме n=0, единственят възел е в средата на интервала $x_0=\frac{a+b}{2}$ . Формулата, която се

получава е $\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{0} C_k L_0(f,x_k)=\int_a^b l_{0,0}(x)\,dx.f(\frac{a+b}{2})=(b-a)f(\frac{a+b}{2})$

Геометрична интерпретация: лицето на фогурата между графиката на функцията и абсцисата се заменя с лицето на правоъгълника със страни b-a и височина стойността на функцията в средата на интервала.

Грешка на метода: Нека предположим, че функцията е двукратно непрекъснато-диференцируема.

$R_{пр}(f)=\int_a^b f[x_0,x](x-x_0)\,dx$ . Ще пресметнем $f[x_0,x]$ от

$$f[x_0,x_0,x]=\frac{f[x_0,x]-f[x_0,x_0]}{x-x_0}=¿\, f[x_0,x]=f[x_0,x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_0,x]$$

И така, $R_{пр}(f)=\int_a^b \left(f[x_0,x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_0,x]\right)(x-x_0)\,dx=¿$

$$¿\, f[x_0,x_0]\int_a^b (x-x_0)\,dx+\int_a^b f[x_0,x_0,x](x-x_0)^2\,dx$$

Първият интеграл е 0, тъй като $x_0=\frac{a+b}{2}$ . За втория интеграл да приложим формулата за средната стойност.

$$R_{пр}(f)=f[x_0,x_0,\xi]\frac{(x-x_0)^3}{3}¿_{x=a}^{x=b}=f[x_0,x_0,\xi]\frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3}=f[x_0,x_0,x]\frac{\frac{(b-a)^3}{8}-\frac{(a-b)^3}{8}}{3}=\frac{f[x_0,x_0,\xi}{12}$$

Но $f[x_0,x_0,\xi]=\frac{f''(\eta)}{2!}$ , следователно $R_{пр}(f)=\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3$

**2.2 Формула на Трапеците**: n=1, $x_0=a, x_1=b$

*Извод 1:*

Имаме $\omega(x)=(x-a)(x-b);\omega'(x)=2x-a-b;\omega'(a)=a-b;\omega'(b)=b-a.$

$$f\approx L_1(f,x)=f(a)\,l_{0,1}(x)+f(b)\,l_{1,1}(x),\, l_{i,1}=\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\,\omega'(x_i)}$$ . Получаваме

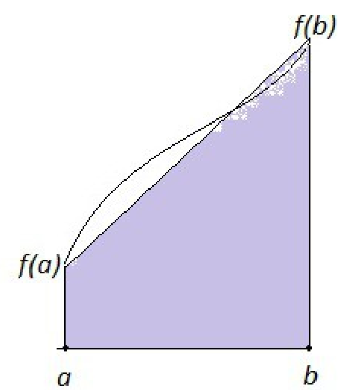
$$l_{0,1}(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-a)(b-a)}=\frac{x-b}{b-a};l_{1,1}=\frac{(x-a)(x-b)}{(x-b)(a-b)}=\frac{x-a}{a-b}$$

$$C_0=\int_a^b \frac{x-b}{a-b}dx=\frac{1}{a-b}\left(\frac{b^2-a^2}{2}-b(b-a)\right)=\frac{1}{2(a-b)}(-b^2+2ab-a^2)=\frac{b-a}{2}$$

$$C_1=\int_a^b \frac{x-a}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}-a(b-a)\right)=\frac{1}{2(b-a)}(b^2+2ab+a^2)=\frac{b-a}{2}$$

И така, формулата е

$$Q_{тр}(f)=\frac{b-a}{2}f(a)+\frac{b-a}{2}f(b)=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$




*Извод 2*:

За $L_1(f,x)$ имаме представянето

$$L_1(f;x)=f(a)+f[a,b](x-a)$$

Да заместим и да направим извод:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b f(a)+f[a,b](x-a)dx=\text{¿}$$

$$\text{¿}f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}-a(b-a)\right)=\text{¿}$$

$$\text{¿}f(a)(b-a)+\frac{f(b)-f(a)}{2}(b-a)=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Геометрична интерпретация: лицето на фогурата между графиката на функцията и абсцисата се заменя с лицето на трапец с основи f(a),f(b) и височина b-a.

Грешка: $R_{тр}(f)=\int_a^b f[a,b,x](x-a)(x-b)dx=f[a,b,\xi]\int_a^b (x-a)(x-b)dx$

Да сменим променливата в интеграла : $x:=a+(b-a)t$ , имаме

$$R_{тр}(f)=f[a,b,\xi]\int_0^1 (b-a)t(b-a)(t-1)(b-a)dt=\frac{(b-a)^3 f''(\xi 1)}{2}\int_0^1 t(t-1)dt=(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})\frac{(b-a)^3 f''(\xi 1)}{2}=\frac{-(b-$$

**2.3 Формула на Симпсън** : n=2 , $x_0=a, x_1=\frac{a+b}{2}, x_2=b$ . Тя се получава като линейна комбинация от формулите на правоъгълниците и трапците. Нека запишем формулата на правоъгълниците за $x_1=\frac{a+b}{2}$ и формулата на трапците за $x_0$ , $x_2$ относно функцията $P(x)=L_2(f;x)$ , с която интерполираме f.

$$\int_a^b P(x)dx=(b-a)P\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{P''(\xi_1)}{24}(b-a)^3$$

$$\int_a^b P(x)dx=\frac{(b-a)}{2}(P(a)+P(b))-\frac{P''(\xi_2)}{12}(b-a)^3$$

Но $P(x)$ е полином от втора степен и втората му производна е константа. Нека умножим първото равенство с 2 и да го съберем с второто. Получаваме

$$3\int_a^b P(x)dx=\frac{(b-a)}{2}(P(a)+P(b))+2(b-a)P(\frac{a+b}{2})$$

След преобразуване в дясно,

$$\int_a^b P(x)dx=\frac{(b-a)}{6}[P(a)+4\mathrm{P}(\frac{a+b}{2})+P(b)]$$

Получихме формулата на Симпсън :

$$\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b P(x)dx=\frac{(b-a)}{6}[P(a)+4\mathrm{P}(\frac{a+b}{2})+P(b)]$$

Грешката от метода на Симпсън се извежда подобно както при правоъгълниците и е равна на

$$R_{сим}(f)=\frac{-f^{(4)}(\zeta)}{2880}(b-a)^5$$

Геометрично интерпретацията е от формулите на трапците и правоъгълниците, т.к. формулата на Симпсън е линейна комбинация от тях.

**Дефиниция 2.1 (съставна квадратурна формула)**
Нека е дадена квадратурната формула

$$(1)\ I(f)=\int_a^b f(x)\,dx\approx\sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k):=Q(f).$$

n-та съставна кв. ф-ла., съответна на (1) наричаме $S_n(f)$, получена по следня н-н :

1. Разделяме интервала [a, b] на n равни части: $x_k=a+\frac{(b-a)}{n}k,\ k=0,1,..,n$
2. $I(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx\approx\sum_{k=0}^{n-1} Q(f;[x_k,x_{k+1}])$ (във всеки инт. ползваме (1))

**2.4 Съставна формула на правоъгълниците.** Прилагайки деф. 2.1. към формулата на правоъгълниците директно получаваме

$$S_n^{пр}(f)=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)$$

Оценка на грешката на формулата на съставната ф-ла на правоъгълниците:

$$R_n^{пр}(f)=I(f)-S_n^{пр}(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left[f(x)-(x_{k+1}-x_k)\,f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right]dx$$

Изразите в сумата са грешки на формула на правоъгълници в съответните малки интервалчета. За тях сме извели грешката.

$$R_n^{пр}(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f''(\xi_k)}{24}(x_{k+1}-x_k)^3=\frac{(b-a)^3}{24\,n^3}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)$$

Понеже втората производна е непрекъсната, то е ограничена отдолу и отгоре от константите m и M.

Тогава израза $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)\,\epsilon[m,M]$ и следователно съществува точка $\xi\epsilon[a,b]$, за която този израз е равен на $f''(\xi)$. Окончателно,

$$R_n^{пр}(f)=\frac{(b-a)^3}{24\,n^2}f''(\xi)$$

## 3.

Разглеждаме кв. формли от вида

$$(1)\, I(f)=\int_a^b \mu(x) f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) := Q(f).$$

Както знаем, каквито и да са възлите можем да изберем константите така, че формулата (1) да бъде точна за полиномите от n-1 степен. Това става чрез

$$A_k=\int_a^b \mu(x)\, l_{k,n-1}(x)\,dx,\ k=1,2,..,n$$

Оказва се, че е възможно да построим формули, които са точни за по- висока степен от n-1 при n възела. Например, формулата на правоъгълниците, която е с 1 възел е точна освен за константите, и за полиномите от 1 степен.

**Дефиниция 3.1 (АСТ)**

Казваме, че кв. ф-ла (1) има алгебрична степен на точност (АСТ) равна на m, ако (1) е точна за всички полиноми от степен m и има поне един полином от степен m+1, за който не е точна. В такъв смисъл, АСТ е максималната степен на точност.

Еквивалентно на това АСТ на (1) да е m е

$$R(x^k)=0,\ k=0,1,..,m;\ R(x^{m+1})\neq 0,$$

тъй като $\{x^k\}$ са базисни полиноми.

**Твърдение**: За всички формули от вида (1), АСТ<2n.

Доказателство:

Да разгледаме полинома от степен 2n , $\omega^2(x)=(x-x_1)^2\ldots(x-x_n)^2$ . Ясно е, че интеграла от тази функция е строго положителен. Както и да изберем коефициентите в (1), формулата ще даде $Q(f)=0$ . Следователно грешката ще е равна на самия интеграл и няма да е 0.

**Теорема 3.1 (Гаус)**

Нека е даден [a, b] с тегло $\mu(x)$ . Тогава за всяко $n \epsilon N$ съществува единствена кв. формула от вида (1) с АСТ=2n+1. Възлите на тази формула са нулите на полинома от степен n, който е ортогонален с тегло $\mu(x)$ в [a,b] на полиномите от степен n-1.

Доказателство:

Съществуване. Нека $\omega(x)$ е полинома със степен n и старши коефициент 1, който е ортогонален с тегло $\mu(x)$ на всички полиноми от $\pi_{n-1}$ , т.е.

$$\forall q \epsilon \pi_{n-1}: \int_a^b \mu(x) q(x) \omega(x) dx = 0$$ .

Този полином има прости нули $a \le x_1 < x_2 < .. < x_n \le b$

Нека образуваме интерполационна формула от типа (1) с тези възли и коефициенти $A_k = \int_a^b \mu(x) l_{k,n-1}(x) dx, k=1,2,..,n$ . Ние знаем, че тази квадратурна формула е точна за полиномите от $\pi_{n-1}$ . Ще докажем, че е точна и за $\pi_{2n-1}$ .

Нека f е полином от степен 2n-1. Да го разделим с остатък на $\omega(x)$ :

$$f = \omega(x) q(x) + r(x), q \epsilon \pi_{n-1}, deg(r) < deg(\omega), .\, т.е.\, r \epsilon \pi_{n-1}.$$

Имаме, че $\int_a^b \mu(x) f(x) dx = \int_a^b \mu(x) \omega(x) q(x) dx + \int_a^b \mu(x) r(x) dx = \int_a^b \mu(x) r(x) dx$ ,

понеже $\omega$ е оргогонален на q. Но формулата , която конструирахме е точна за $r$ , следователно е точна и за f и $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \overset{\omega(x_i)=0}{=} \sum_{k=1}^n A_k r(x_k)$ .

Единственост.

Нека (1) е някаква кв. формула, която е точна за всички полиноми от $\pi_{2n-1}$ . Да конструираме $\omega(x) = (x - x_1)..(x - x_n)$ чрез възлите на (1). Ще покажем, че този полином е ортогонален на всички полиноми от степен n-1. Но понеже има единствен полином с това свойство , то единствеността ще е доказана.

Нека q е от степен n-1.Имаме

$$\int_a^b \mu(x)\,\omega(x)\,\underset{\epsilon\,\pi_{2n-1}}{q(x)}\,dx \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} A_k(\omega q)(x_k) \stackrel{\omega(x_i)=0}{=} 0$$

**Дефиниция 3.2 (кв. ф-ла на Гаус)**

Единствената квадратурна формула с АСТ=2n-1 се нарича квадратурна формула на Гаус. Бележи се по следния начин: $I(f) \approx Q_n^G(f)$

**Твърдение** (оценка на грешката на кв. ф-ла на Гаус)

Нека $Q_n^G(f)$ е квадратурната ф-ла на Гаус от степен n и $f \epsilon C^2[a,b]$ функция. Тогава грешката на ф-лата на Гаус е

$$R_n^G = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \mu(x)\,\omega^2(x)\,dx$$

Литература:

[1] Лекции по ЧМА, доц. Лозко Милев, летен семестър на 2009/2010г. , спец. Приложна математика
[2] Числени методи, Сендов
[3] wikipedia