Тема 15

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.

Анотация

Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.

1. Да се дефинира понятието неподвижна точка на изображението ϕ и да се докаже, че ако ϕ енепрекъснато изображение на интервала [a, b] в себе си, то ϕ има поне една неподвижна точка в [a, b]. Да сепокаже, че решаването на уравнението f (x) = 0 може да се сведе към намиране на неподвижна точка.

2. Да се дефинира понятието свиващо изображение и да се докаже, че ако ϕ е непрекъснато изображение на интервала [a, b] в себе си и е свиващо с константа на Липшиц q < 1, то: а) уравнението x = ϕ (x) има единствен корен ξ в [a, b]; б) редицата $\{x_n\}$ от последователни приближения (при произволно x0 ϵ [a,b] и $x_{n+1}=\phi(x_n), n=0,1,..$) клони към ξ при n $\rightarrow \infty$, като $¿ x_n - \xi \vee ¿ (b-a) q^n$ за всяко n. Да се получи катоследствие, че ако ξ е корен на уравнението $x=\phi(x)$ и ϕ има непрекъсната производна в околност U на ξ, закоято $¿ \phi'(x) \vee ¿ 1$, то при достатъчно добро начално приближение x0 итерационният процес, породен от ϕ, есходящ със скоростта на геометрична прогресия. Да се дефинира понятието ред на сходимост.

3. Да се дадат геометрична илюстрация, формула за последователните приближения и ред на сходимост при: метод на хордите, метод на секущите и метод на Нютон. Да се докаже, че при метода на хордите, сходимостта е със скоростта на геометричната прогресия (при условие, че коренът е отделен в достатъчномалък интервал).

Литература: [1], [6], [21].

1.

<u>Дефиниция 1.1</u> Неподвижна точка за изображение ϕ.

Казваме, че ξ е *неподвижна точка* за изображението ϕ, ако $\phi(\xi)=\xi$.

<u>Теорема 1.1</u>(Брауер)

Нека ϕ е непрекъснато изображение на интервала [a, b] в себе си. Тогава то има поне една неподвижна точка.

<u>Доказателство:</u>

Да разгледаме функцията $\psi(x)=x-\phi(x)$. Достатъчно е да докажем, че тя има нула. Но понеже $\phi(a)\geq a \text{ и } \phi(b)\leq b$ (изображението е на интервала **в себе си**), то $\psi(a)\leq 0 ; \psi(b)\geq 0$. Ако поне едното е 0, то сме доказали теоремата. Ако пък и двете неравенства са строги, прилагаме теоремата на Ферма, че ако непрекъсната функция в крайщата на интервал има различни знаци, то тя има нула вътре.

Идеята за неподвижна точка е важна, защото въпроса за намиране на нула на уравнение се свежда до намиране на неподвижна точка на функция. Наистина, нека разгледаме уравнението

$(1)\ f(x)=0$

Нека g(x) е произволна функция, която не се нулира там, където търсим корени на функцията f(x). Тогава уравнението (1) е еквивалентно на $0=g(x)f(x)$, а то на

$(2)\ x=x+g(x)f(x)=\phi(x)$

2.

<u>Дефиниция 2.1</u> (свиващо изображение)

Казваме, че изображението ϕ е свиващо в интервала [a, b] ако е Липшицово с константа q от 0 до 1, т.е.

$\exists q \epsilon (0,1): \forall x, y \epsilon [a,b]: \vee \phi(x) - \phi(y) \vee$ ¿ $q \vee x - y \vee$ ¿

<u>Теорема 2.1</u>

Нека изображението ϕ е на интервала [a, b] в себе си и освен това е свиващо в него. Тогава

а) уравнението $x = \phi(x)$ има единствен корен $\xi \epsilon [a,b]$

b) за всяко начално приближение x_0 $\epsilon [a,b]$ редицата, дефинирана с $x_{n+1} = \phi(x_n)$ е добре определена, сходяща към корена ξ при това е в сила

¿ $x_n - \xi \vee \leq q^n (b-a), \forall n = 0,1,2,..$

<u>Доказателство:</u>

а) Съществуване: дефинираме $g(x) = x - \phi(x)$ - непрекъсната. Понеже ϕ е изображение на [a,b] в себе си, то

$$g(a) = a - \phi(a) \leq 0$$

$$g(b) = b - \phi(b) \geq 0$$

От тук, подобно на разсъждението в т.1 следва, че имаме поне една нула (Ферма).

Единственост: Нека $\xi_1 \neq \xi_2$ са два корена на $g(x)$ в интервала [a, b]. Имаме

$$|\xi_1 - \xi_2| \overset{\xi_i = \phi(\xi_i)}{=} |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| \overset{\phi - Липшицова}{<} q|\xi_1 - \xi_2| \overset{q<1}{<} |\xi_1 - \xi_2|,$$

Което е противоречие.

b) редицата $x_{n+1} = \phi(x_n)$ е добре дефинирана, понеже ϕ е изображение на интервала в себе си. Ще докажем първо оценката : нека n е естествено, имаме:

¿ $x_n - \xi \vee$ $\overset{\xi = \phi(\xi)}{¿}$ $\vee \phi(x_{n-1}) - \phi(\xi) \vee$ $\overset{\phi - Липшицова}{¿}$ $q \vee x_{n-1} - \xi \vee$ ¿

Продължавайки така по индукция, получаваме оценката

¿ $x_n - \xi \vee$ ¿ $q^n \vee x_0 - \xi \vee \leq q^n (b-a)$.

Но понеже q<1 , то веднага получаваме и нужната сходимост.

Нека разглеждаме уравнението $x = \phi(x)$ и знаем, че то има единствен корен в [a, b] и нека ϕ е непрекъснато- диференцируема поне в околност U на корена. Ще изведем критерий кога итерационния процес $x_{n+1}=\phi(x_n)$ е сходящ към този корен. Първо, доказваме следната

<u>Теорема 2.2</u> (ДУ за свиващо изображение)

Нека ϕ има непрекъсната производна в интервала [a, b] , която е по модул по- малка от 1 в целия интервал. Тогава ϕ е свиващо.

<u>Доказателство:</u>

Нека x и y са точки в интервала. За разликата $¿\phi(x)-\phi(y)\vee¿$ прилагаме теоремата за средната стойност:

$$|\phi(x)-\phi(y)|=|\phi(\eta)||x-y|<|x-y|,\eta\epsilon(x,y),$$

с което теоремата е доказана.

И така, нека ϕ е непрекъснато- диференцируема поне в околност U на корена на уравнението $x=\phi(x)$. Тази околност съдържа интервал, който загражда корена. В този интервал прилагаме Теорема 2.2 и получаваме, че ϕ е свиващо вътре и уравнението има единствен корен, към който итерационния метод е сходящ, стига началното приближение да е в U. Освен това, нека $q=¿x\epsilon U\phi(x)<1$ (той съществува). Тогава за сходимостта е в сила и оценката от точка b) на теорема 2.1.

<u>Дефиниция 2.2</u> (скорост на сходимост на ИП, ред на сходимост)

Нека разгледаме ИП $x_{n+1}=\phi(x_n)$.

- Нека е в сила оценката $|x_n-\xi|\le Cq^n, q<1$; тогава казваме, че ИП е сходящ със скорост на геометрична прогресия и има ред на сходимост 1.
- Нека е в сила оценката $|x_n-\xi|\le Cq^{p^n}, q<1, p>1$; Казваме че ИП има ред на сходимост p (в първата точка p=1).

3.

Някои конкретни методи.

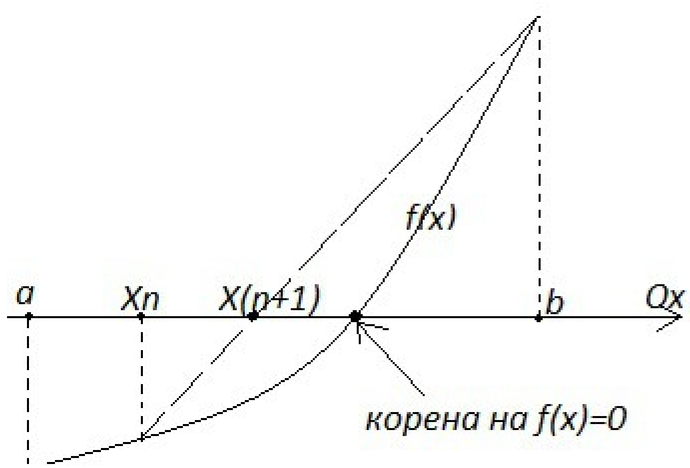
Предполагаме, че $f\epsilon C^2[a,b]$ и са изпълнени следните словия :

1¿ $f(a)f(b)<0$

2¿ $f'(x)f''(x)\neq 0, x\epsilon[a,b]$

От 2) като следствие имаме 4 случая за знаците на $f'(x), f''(x)$. За определеност ще смятаме, че $f'(x)>0, f''(x)>0$ – функцията е растяща и изпъкнала.

3.1 **Метод на хордите**. При предположенията в 3. Имаме , че $a<\xi$ и дефинираме първото приближение $x_0=a$.



Същност на алгоритъма:
Нека сме намерили x_n. Да разгледаме правата през точките (x_n, $f(x_n)$) и (b,f(b)). Поради свойствата на функцията тази права пресича отсечката [$a,\xi¿$ в точка $x_{n+1}>x_n$. Да изразим аналитично тази зависимост, извеждайки рекурентната формула. Правата през (x_n, $f(x_n)$) и (b,f(b)) е с уравнение $\frac{x-x_n}{b-x_n}=\frac{y-f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}$ или изразено за y : $y=f(x_n)+(x-x_n)\frac{f(b)-f(x_n)}{b-x_n}=f(x_n)+(x-x_n)f[b,x]$. Следващото приближение, x_{n+1}, е решение на $f(x_n)+(x-x_n)f[b,x]=0$, т.е. $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f[b,x]}$

Съответното свиващо изображение, което отговаря на алгоритъма е

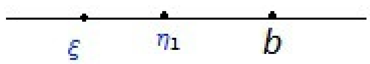
$$\phi(x)=x-\frac{f(x)}{f[b,x]}.$$

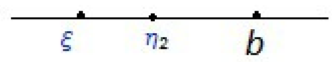
***<u>Твърдение</u>**: При избор на достатъчно тесен итервал [a, b]* , алгоритъмът „метод на хордите“ има скорост на сходимост като геометрична прогресия.
<u>Доказателство:</u>
Достатъчно е да докажем, че производната $¿\phi'(\xi)\vee¿1$. Тогава, понеже ϕ' е непрекъсната, ще намерим цял итервал, в който $¿\phi'(x)\vee¿1$.

$\phi(x)=x-f(x)\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}$, следователно $\phi'(x)=1-f'(x)\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}-f(x)\left(\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}\right)'$

Да заместим $x=\xi$: $\phi'(\xi)=1-f'(\xi)\dfrac{b-\xi}{f(b)-f(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(\xi)-f'(\xi)(b-\xi)}{f(b)-f(\xi)}$

Да развием около точката ξ f в ред на Тейлор съответно до 1я и 2ри член.





$$f(b)=f(\xi)+f'(\xi)(b-\xi)+\frac{f''(\eta_1)(b-\xi)^2}{2}$$

$$f(b)=f(\xi)+f'(\eta_2)(b-\xi)$$

Имайки в предвид последните две равенства, $\phi'(\xi)=\dfrac{\dfrac{f''(\eta_1)(b-\xi)^2}{2}}{f'(\eta_2)(b-\xi)}=\dfrac{f''(\eta_1)(b-\xi)}{2f'(\eta_2)}$

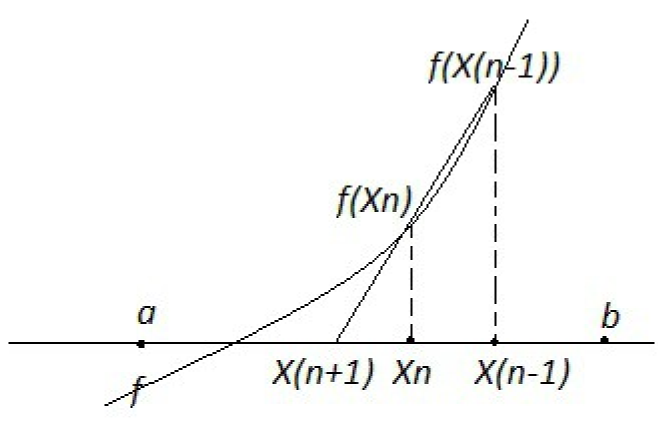
Така поучаваме, че $¿\,\phi'(\xi)\vee¿\,\dfrac{M_2}{2M_1}(b-a)$, където

$$M_2=\max_{x\epsilon[a,b]}\vee f''(x)\vee, M_1=\min_{x\epsilon[a,b]}\vee f'(x)\vee¿$$

Имаме, че ако $\dfrac{M_2}{2M_1}(b-a)<1$ то $|\phi'(\xi)|<1$. Последното е условие за интервала:

$$b-a<2\frac{M_1}{M_2}\ .$$

3.2 Метод на секущите. Избираме началното приближение $b=x_0$. Избираме още една начална точка x_1, достатъчно близо до x_0.Същност на алгоритъма: Нека сме намерили две приближения x_n и x_{n-1}. През точките (x_n, $f(x_n)$), (x_{n-1}, $f(x_{n-1})$) построяваме права и където тя пресича оста Ox , е следващата точка x_{n+1}.



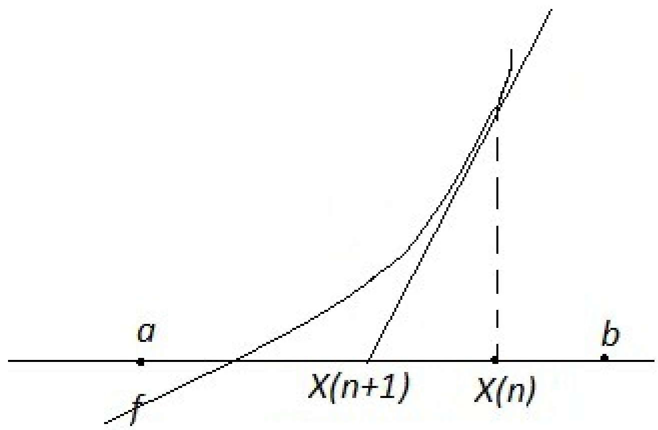
Правата има уравнение $\frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}=\frac{y-f(x_n)}{f(x_{n-1})-f(x_n)}$. Изразена за y ,

$$y=f(x_n)+(x-x_n)\frac{f(x_{n-1})-f(x_n)}{x_{n-1}-x_n}=f(x_n)+(x-x_n)f[x_{n-1},x_n]$$

Да приравним на 0 за да получим n+1 –вата точка.

$$f(x_n)+(x-x_n)f[x_{n-1},x_n]=0\ т.с.т.\ x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f[x_{n-1},x_n]}$$

Методът на секущите има ред на сходимост златното сечение $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



3.3 Метод на Нютон

Начално приближение $b=x_0$. Същина на алгоритъма: Нека сме намерили n-то приближение x_n. Да построим допирателната към точката $(x_n,f(x_n))$. Където тя пресича оста Ox е следващото приближение x_{n+1}.

Да изведем формула за следващо приближение. Допирателната в точка $(x_n,f(x_n))$.

$$y=f(x_n)-f'(x)(x-x_n)$$

n+1 то приближение е корен на $f(x_n)-f'(x_n)(x-x_n)=0.$ Следователно формулата е

$$x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Реда на сходимост за метода на Нютон е 2.

Литература:

[1] Числени методи , ч. 1, Сендов

[2] Лекции по ЧМА, доц. Лозко Милев, летен семестър на 2009/2010г. , спец. Приложна математика

[3] Wikipedia

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.