Тема 13

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Метод на Фурие за решаване на уравнението на струната.

Анотация

Метод на Фурие за решаване на уравнението на струната.

Формулира се смесената задача за уравнението на струната $u_{tt}=a^2 u_{xx}$ в областта $t>0, 0\le x\le l$. Разделят се променливите. Извежда се формалното реше-ние във вид на безкраен ред. Кога този ред е сходящ?

Уравнението на струната е пример хиперболично частно диференциално уравнение и описва трептения на различни среди. В него участва времето , т.е. описва се нестационарен процес. Останалите променливи се наричат пространствени. В най-простия си вариант то има следния вид

$$u_{tt}=a^2(u_{x_1x_1}+\ldots+u_{x_nx_n})=a^2\nabla^2 u$$

a >0 е фиксирана константа, която отговаря на скоростта на разпространение на изолирани вълни.

В абстрактна форма, този струнен оператор има вида $S=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2$.На първо ниво, уравнението може да се усложни откъм хомогенност. При по- сложни среди a не е константа.

В едмомерния случай, уравнението има вида $u_{tt}=a^2u_{xx}$ и описва трептенето на идеално еластична струна. Задачата на Коши за $u_{tt}=a^2u_{xx}$ има вида

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\ t>0,\ 0\le x\le l,\ u\epsilon C^2(R_+\times[0,l])$$

$$u(x,0)=\phi(x),\ 0\le x\le l,\ \phi\epsilon C^2([0,l])$$

$$u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l,\ \psi\epsilon C^1([0,l])$$

За тази задача имаме теорема за съществуване и единственост и дори диретна формула за решаване, а именно $u(x,t)=\frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds$. Въпреки, че имаме това решение поведението на струната, описана от задачата на Коши няма да удовлетворява интуитивната представа за струна, разглеждана в краен интервал, тъй като не е фиксирана по никакъв начин в крайщата. Ако началното условие има профил на изолирана вълна, то тази вълна ще започне да се придвижва „към безкрайността” и ще излезе за крайно време от обсега [0, l]. Това налага нуждата да разглеждаме т.нар. смесена задача на струната: зададени са начално положение и скорост, както и две условия в двата крайща на струната – 0 и l.

Да формулираме смесената задача за струната:

$$+¿ \times [0,l]$$
$$R_{¿}$$
$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ t>0,\ 0 \le x \le l,\ u \epsilon C^2 ¿$$

$$u(x,0) = \phi(x),\ 0 \le x \le l,\ \phi \epsilon C^2([0,l])$$

$$u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l,\ \psi \epsilon C^1([0,l])$$

$$\alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u_t(0,t) = 0,\ t \ge 0$$

$$\alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_t(l,t) = 0,\ t \ge 0$$

За да искаме да получим гладко решение е нужно да наложим и условията за съгласуваност

$$\alpha_1 \phi(0) + \beta_1 \psi(0) = 0$$

$\alpha_2 \phi(l) + \beta_2 \psi(l) = 0$ и ДРУГИ!!!

<u>Метод на Фурие</u>

Методът на Фурие се състои в това, че решението се търси във вид на функционален ред като се налагат условия върху коефициентите му. Това става на някоолко стъпки:

1. Разделяне на променливите
2. Решаване на задача на Щурм- Лиувил за съответната специфична смесена задача
3. Еднозначно определяне на коефициентите на реда
4. Изледване за сходимост

Ще приложим метода на Фурие за задачата с допълнителни условия $u(0,t) = u(l,t) = 0$

при предположението за съгласуваност $\phi(0) = \phi(l) = 0,\ \psi'(0) = \psi'(l) = 0,\ \phi''(0) = \phi''(l) = 0$.

Общността ще се загуби в т.2, когато ще разделим променливите, но ще обясним какво се случва в останалите случаи.

И така, да решим задачата

$$+¿$$
$$[0,l] \times R_{¿}$$
(1) $u_{tt} = u_{xx},\ t>0,\ 0 \le x \le l,\ u \epsilon C^2 ¿$

(2) $u(x,0) = \phi(x),\ 0 \le x \le l,\ \phi \epsilon C^2([0,l])$

(3) $u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l,\ \psi \epsilon C^1([0,l])$

(4) $u(0,t) = u(l,t) = 0,\ t \ge 0$

Заб. Положихме а=1 – причината е, че чрез смяната $\tau = at$ уравнението се свежда до (1)

1. Разделяне на променливите

Да потърсим ненулево решение на (1) във вида $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ (разделяне на променливите). Да заместим тази функция в (1) за да получим необходимо условие за $X(x)\,T(t)$ да бъде решение.

$$X(x)\,T''(t) = X''(x)\,T(t)$$

Да разделим на $X(x)\,T(t)$ - получаваме $\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$. Получаваме тъждество на функции на различни аргументи – това означава, че те са равни на константа. Това условие е и достатъчно за да е $X(x)\,T(t)$ решение на (1) – проверка чрез заместване. Получаваме ОДУ от втори ред за X и T :

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0 \quad X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

Да ограничим тези уравнения още с (4), като в него приложим функцията $X(x)\,T(t)$

$$X(0)\,T(t) = 0$$

$$X(l)\,T(t) = 0$$

Понеже T е ненулева поне в някаква област, то имаме, че $X(0) = X(l) = 0$

2. Ще решим първо задачата

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0$$

$$X(0) = X(l) = 0$$

Задачи от този род се наричат задачи на Щурм- Лиувил. Състоят се в това, че се решава задача за намиране на собствени стойности и функции на даден оператор (в случая – втора производна) при допълнителни ограничения. Идеята е да намерим всички такива X и λ , за които задачата има решение, от там ще решим и $T''(t) - \lambda T(t) = 0$. По този начин ще намерим пълна система от функции, които удовлетворяват (1) и (4). След това ще образуваме линейна комбинация от тях и ще наложим към коефициентите условия, така че линейната комбинация да удовлетворява и условията (2), (3).

Да отбележим още, че ако решавахме общата задача със смесени условия

$$\alpha_1\, u(0,t) + \beta_1\, u_t(0,t) = 0,\ t \geq 0$$

$\alpha_2 u(l,t)+\beta_2 u_t(l,t)=0, t\geq 0$

ще имаме допълнителни условия в задачата на Щурм- Лиувил от вида

$\alpha_1 X(0)+\beta_1 X'(0)=0$

$\alpha_2 X(0)+\beta_2 X'(0)=0$ И ДРУГИ!!!

И така, да разгледаме каква е ситуацията при различните знаци на λ :

1сл. : $\lambda > 0$

Решенията на $X''(x)-\lambda X(x)=0$ са $C_1 e^{x\sqrt{\lambda}}+C_2 e^{-x\sqrt{\lambda}}$ Да наложим $X(0)=X(l)=0$

Получаваме системата

$C_1+C_2=0$

$C_1 e^{l\sqrt{\lambda}}+C_2 e^{-l\sqrt{\lambda}}=0$

Това е хомогенна система с ненулева детерминанта и следователно има само едно решение – нулевото.

2сл. $\lambda = 0$

Решенията на $X''(x)-\lambda X(x)=0$ са $X(x)=Cx+D=0$. Като наложим допълнителните условия отново получаваме C=D=0.

3сл. $\lambda < 0$

Реалните решения на $X''(x)-\lambda X(x)$ (след отделяне от $C_1 e^{ix\sqrt{-\lambda}}+C_2 e^{-ix\sqrt{-\lambda}}=0$) са

$X(x)=A\cos(x\sqrt{-\lambda})+B\sin(x\sqrt{-\lambda})$. Да наложим допълнителните условия. Получаваме

$X(0)=A\cos(0)+B\sin(0)=0$

$X(l)=A\cos(l\sqrt{-\lambda})+B\sin(l\sqrt{-\lambda})$ =0

От първото уравнение имаме A=0, а от второто получаваме $l\sqrt{-\lambda}=k\pi \Leftrightarrow \lambda_k=\frac{-k^2\pi^2}{l^2}$

Получихме, че (1),(4) се удовлетворяват от безкрайно много собствени функции, имащи вида

$\left\{\sin\left(\frac{xk\pi}{l}\right)\right\}_{k=1}^{\infty}$, отговарящи на собствени числа $\left\{\frac{-k^2\pi^2}{l^2}\right\}_{k=1}^{\infty}$

Според една теорема, множеството собствени функции породени от задача на Щурм-Лиувил, е пълна система в частта от пространството от фунции, където действа диференциалния оператор.

След като намерихме всички възможни λ, директно решаваме и $T''(t)-\lambda T(t)=0$:

$$T(t)=A_k\sin(\frac{tk\pi}{l})+B_k\cos(\frac{tk\pi}{l})$$

3. Да образуваме ред от всички решения

$$u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}(A_k\sin(\frac{tk\pi}{l})+B_k\cos(\frac{tk\pi}{l}))\sin(\frac{xk\pi}{l})$$

Сега ще поискаме условията (2), (3)

$$u(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}(A_k\sin(0)+B_k\cos(0))\sin(\frac{xk\pi}{l})=\sum_{i=1}^{\infty}B_k\sin(\frac{xk\pi}{l})=\phi(x)$$

От тук, ако за всяко k умножим последното равенство по $\sin(\frac{xk\pi}{l})$ и интегрираме в границы от -l до l, заради ортогоналността на собствените функции получаваме формулата

$$B_k=\frac{\int_{-l}^{l}\phi(\overset{¿}{x})\sin(\frac{xk\pi}{l})dx}{\int_{-l}^{l}(\sin(\frac{xk\pi}{l}))^2dx}=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\phi(\overset{¿}{x})\sin(\frac{xk\pi}{l})dx$$

Тук $\phi(\overset{¿}{x})$ е нечетното продължение на $\phi(x)$ – възможно е и гладкостта се запазва.

Нека също продължим нечетно $\psi\, до\, \overset{¿}{\psi}$.

Нека да наложим и условието за производната. Да диференцираме формално реда

$$u_t(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{k\pi}{l}A_k\cos(\frac{tk\pi}{l})-\frac{k\pi}{l}B_k\sin(\frac{tk\pi}{l}))\sin(\frac{xk\pi}{l})$$

$$u_t(x,0)=\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{k\pi}{l}A_k\cos(0)-\frac{k\pi}{l}B_k\sin(0))\sin(\frac{xk\pi}{l})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{k\pi}{l}A_k\sin(\frac{xk\pi}{l})=\psi(x)$$

От тук, ако за всяко k умножим последното равенство по $\sin(\frac{xk\pi}{l})$ и интегрираме в граници от 0 до l, заради ортогоналността на собствените функции получаваме формулата

$$A_k=\frac{1}{k\pi}\frac{\int\limits_{-l}^{l}\psi(\text{¿}x)\sin(\frac{xk\pi}{l})dx}{\int\limits_{-l}^{l}(\sin(\frac{xk\pi}{l}))^2 dx}=\frac{1}{l}\frac{l}{k\pi}\int\limits_{-l}^{l}\psi(\text{¿}x)\sin(\frac{xk\pi}{l})dx=\frac{1}{k\pi}\int\limits_{-l}^{l}\psi(\text{¿}x)\sin(\frac{xk\pi}{l})dx$$

Определихме напълно реда, но до тук определянето беше на ниво *необходимо условие.* За да докажем, че тези условия за константите са и достатъчни, трябва да докажем, че реда е сходящ и може да се диференцира.

4. За да докажем нужната сходимост ще предположим, че $\phi''(x),\psi'(x)$ (те или още една производна ?) са гладки. Това се пренася към $\text{¿}\phi,\text{¿}\psi$

Ако докажем сходимост на реда $u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}(A_k\sin(\frac{tk\pi}{l})+B_k\cos(\frac{tk\pi}{l}))\sin(\frac{xk\pi}{l})$

заедно с формалните му производни u_t,u_{tt},u_{xx},u_x , то условията върху коефициентите , които наложихме ще са и ДОСТАТЪЧНИ за да са изпълнени всички (1), (2), (3), (4).
Вижда се, че при формалното диференциране ще се изнесат множители $\frac{k\pi}{l},(\frac{k\pi}{l})^2$

съответно при производните от първи и втори ред. Вътре ще имаме отново линейна

комбинация от тригонометричните функции ($\sin(\frac{xk\pi}{l}),\cos(\frac{xk\pi}{l})$)с коефициенти

(A_k,B_k) . От тези разсъждения става ясно, че ако докажем сходимостта на реда

$$\text{¿}A_k\vee+\text{¿}B_k\vee\text{¿}\quad(\frac{k\pi}{l})^2\text{¿}\quad\sum_{i=1}^{\infty}\text{¿}$$

то от това ще следват сходимостите на формалните редове на

u,u_t,u_{tt},u_{xx},u_x , тъй като той ги мажорира (критерий на Вайерщрас). От тук пък ще следва теорема за съществуване за задачата, която сме поставили, тъй като ще имаме конструирано решение. Нещо повече, при условията на тази теорема за съществуване може да се докаже и теорема за единственост.

Нека разгледаме отново равенствата за коефициентите

$$B_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}\phi(\text{¿}x)\sin(\frac{xk\pi}{l})dx\quad A_k=\frac{1}{k\pi}\int\limits_{-l}^{l}\psi(\text{¿}x)\sin(\frac{xk\pi}{l})dx$$

Нека в тези равенства интегрираме по части. Например

$$\phi(\text{¿}x) d\cos\left(\frac{xk\pi}{l}\right) = \text{¿}$$

.

$$B_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \phi(\text{¿}x)\, sin\left(\frac{xk\pi}{l}\right) dx = \frac{1}{l}\frac{-l}{k\pi}\int_{-l}^{l} \text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{1}{l}\left(\frac{-l}{k\pi}\phi(\text{¿}x)\cos\left(\frac{xk\pi}{l}\right)\text{¿}_{-l}^{l} + \frac{l}{k\pi}\int_{-l}^{l}\cos\left(\frac{xk\pi}{l}\right)\text{¿}\phi'(x)\, dx\right) = \ldots = \frac{-1}{l}\left(\frac{l}{k\pi}\right)^3 \int_{-l}^{l} \text{¿}\phi'''(x)\sin\left(\frac{xk\pi}{l}\right) dx$$

Аналогично $A_k = \frac{1}{k\pi}\int_{-l}^{l} \psi(\text{¿}x)\, sin\left(\frac{xk\pi}{l}\right) dx = \frac{-1}{k\pi}\left(\left(\frac{1}{k\pi}\right)^2 \int_{-l}^{l} \psi''(\text{¿}x)\, sin\left(\frac{xk\pi}{l}\right) dx\right)$

Така получаваме, че $A_k = -\left(\frac{l}{k\pi}\right)^3 A_k'', B_k = -\left(\frac{l}{k\pi}\right)^3 B_k'''$, където A_k'', B_k''' са фуриеровите коефициенти на функциите $\psi''(\text{¿}x)$ и $\text{¿}\phi'''(x)$

Последните функции принадлежат на $L^2[-l,l]$ и следователно е в сила равенството на Бесел

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{¿} A_k'' \vee \text{¿} \int_{-l}^{l} \text{¿}\psi''(x)\, dx < \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{¿} B_k''' \vee \text{¿} \int_{-l}^{l} \text{¿}\phi'''(x)\, dx < \infty$$

Да се върнем към сходимостта на реда $\sum_{i=1}^{\infty} \text{¿} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \text{¿}\, \text{¿} A_k \vee + \text{¿} B_k \vee \text{¿}$:

$$¿ A_k \vee + ¿ B_k \vee ¿$$
$$¿$$
$$¿ \frac{A_k^{''}}{k} \vee + ¿ \frac{B_k^{''}}{k} \vee ¿$$
$$\frac{l}{\pi} ¿$$
$$\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 ¿$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} ¿$$

Като използваме неравенството $ab < \frac{a^2 + b^2}{2}$ получаваме

$$¿ \frac{A_k^{''}}{k} \vee + ¿ \frac{B_k^{''}}{k} \vee ¿$$
$$¿$$
$$\frac{l}{\pi} ¿$$
$$\sum_{i=1}^{\infty} ¿$$

Забележка. Темата е по- обща, от колкото е нужно поради граничните условия. В този вид не е изпипана достатъчно добре. Препоръчвам да се учи по темата на Хорозов.

Литература:

[1] Частни диференциални уравнения, Т. Генчев

[2] Записки от лекциите по ММФ, спец. математика, Н. Попиванов

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.