Метод на Фурие за уравнението на струната.

(Примерно развиване на въпроса за държавен изпит)

1. Формулировка на смесената задача за уравнението на струната. Частното диференциално уравнение от втори ред с две независими променливи x - пространствена променлива и t - време

(1) $$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad a = (\text{константа}) > 0,$$

наричаме *уравнение на струната.* Неизвестната функция $u(x,t)$ има смисъл на отклонение на струната от равновесното положение в точката x и момента t.

Смесена задача за уравнението на струната в ивицата $S = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t\}$ формулираме като към уравнението (1) добавим *началните условия*

(2) $$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x),$$

и *граничните условия*

(3) $$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

За функциите $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ засега ще предположим, че са непрекъснати в интервала $[0,l]$. По-късно ще наложим още условия.

Методът на Фурие се състои от няколко стъпки.

2. Разделяне на променливите.

1) Ще търсим решение на уравнението на струната като суми (изобщо казано – безкрайни, т.е. редове) на функции с разделени променливи – произведения на функции на една променлива:

(4) $$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Полагаме този израз в (1) и получаваме

(5) $$T''(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x)$$

Тъй като търсим ненулеви решения можем да предположим, че произведението $X(x)T(t)$ е различно от нула в някое отворено подмножество на дефиниционната област S. Тогава можем да разделим двете страни на(5) с дясната страна на (4) и ще получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = (\text{константа}).$$

В горното равенство λ е наистина константа, защото е равна от една страна на израз, който не зависи от x , от друга страна е равна на израз, който не зависи от t.

По този начин уравнението, когато решението е във вида (4) се свежда до двойката обикновени диференциални уравнения

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \tag{7}$$

3. Задача на Щурм-Лиувил. Следващата стъпка е да удовлетворим граничните условия. Ще поискаме всяко от частните решения с разделени променливи (4) да ги удовлетворява. Това води до условията:

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

От изискването функцията $T(t)$ да не е тъждествено нула получаваме, че функциите $X(x)$, удовлетворяващи (7), трябва да удовлетворяват още и граничните условия

$$X(0) = X(l) = 0$$

Уравнението (7) за X и първото условие $X(0) = 0$ дава следните решения:

$$\left| \begin{array}{ll} X(x) = c(\exp^{-kx} - \exp^{kx}) & \text{– при } \lambda = -k^2 < 0 \\ X(x) = cx & \text{– при } \lambda = 0 \\ X(x) = c \sin kx & \text{– при } \lambda = k^2 > 0 \end{array} \right.$$

От условието $X(l) = 0$ получаваме, че при $\lambda \leq 0$ горните формули дават нулеви решения, от които не се интересуваме. При $\lambda = k^2 > 0$ намираме следните решения.

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

и $\lambda = (\frac{n\pi}{l})^2$.

4. Начални условия. Така получения израз за λ заместваме в уравнението (6) за T. Намираме следните решения:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l}$$

Сега можем да съставим частни решения на уравнението на струната, които удовлетворяват граничните условия:

$$u_n = (A_n \cos \frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

с произволни константи A_n, B_n. Остава да удовлетворим началните условия. Тъй като уравнението е линейно, очевидно всяка крайна линейна комбинация на намерените решения е също негово решение. Също така е очевидно, че тази линейна комбинация удовлетворява и граничните условия. Поради това ще съставим ред от горните функции и ще се опитаме да удовлетворим началните условия. Нека търсеното решение е

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi at}{l} + B_n \sin \frac{n\pi at}{l}) \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{8}$$

с неизвестни засега коефициенти. Целта ни е да определим тези коефициенти. Да предположим, че този ред, както и редовете от производните му са равномерно сходящи. Да напишем изикванията, че (8) удовлетворява *началните условия*. Първото условие от (2) дава

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi_0(x),$$

което можем да интерпретираме като развитие на функцията $\varphi_0(x)$ в ред на Фурие. Действително системата от функции $\sin \frac{n\pi x}{l}$, $n = 1, 2, \dots$ е пълна в пространството $L_2([0,l])$. Следователно всяка непрекъсната функция се развива в ред на Фурие (в смисъл на $L_2([0,l])$)по тази система. С други думи коефициентите A_n могат да се изчислят по стандартните формули:

$$A_n = \frac{\int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx}. \tag{9}$$

Точно по същия начин второто начално условие $u_t(x,0) = \varphi_1(x)$ ни дава

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} B_n \sin \frac{n\pi x}{l} = \varphi_1(x).$$

Ще отбележим, че производната съществува поради предположението, че редовете от производните на (8) са равномерно сходящи. Оттук пресмятаме коефициентите B_n:

$$B_n \frac{n\pi a}{l} = \frac{\int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx}.$$

Остава да докажем, че редът, получен чрез така намерените коефициенти A_n, B_n, както и редовете от производните са равномерно сходящи. Сега ще направим допълнителни предположения за функциите $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$. Нека функцията $\varphi_0(x)$ е трикратно гладка, а функцията $\varphi_1(x)$ е двукратно гладка в цялата дефиниционна област. Ще поискаме още да са изпълнени и естествените условия за съгласуване:

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) = \varphi_0(l) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(l) &= 0 \\ \varphi_1(0) = \varphi_1(l) &= 0 \end{aligned}$$

Ще покажем, редовете от вторите производни на реда (8) са равномерно сходящи. Имаме

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi)^2}{l^2}(A_n \cos\frac{n\pi at}{l} + B_n \sin\frac{n\pi at}{l}) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{10}$$

Следователно е достатъчно да докажем, че числовите редове

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{(n\pi)^2}{l^2} \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{(n\pi)^2}{l^2} \tag{11}$$

са абсолютно сходящи (защо е достатъчно?). Ще докажем това за първия ред. Тъй като функцията $\varphi_0(x)$ е трикратно диференцируема с непрекъсната трета производна $\varphi_0^{'''}(x)$ можем да развием последната в ред на Фурие:

$$\varphi_0^{'''}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{'''} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Неравенството на Бесел ни дава, че

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{'''})^2 < \infty.$$

От друга страна интегрирайки по части интеграла, дефиниращ A_n (числителя в (9)), намираме

$$A_n = -A_n^{'''} \frac{l^3}{(n\pi)^3}.$$

Следователно за коефициентите на реда (10) получаваме

$$\frac{(n\pi)^2}{l^2}|A_n| = |A_n^{'''}|\frac{l}{n\pi} \leq \frac{1}{2}(|A_n^{'''}|^2 + \frac{l^2}{(n\pi)^2}),$$

т.е. техните абсолютни стойности се мажорират от членове на сходящ числов ред. Редът от вторите производни по t се изследва по същия начин.

Това ни дава възможност да диференцираме почленно и да проверим, че функцията $u(x,t)c$ удовлетворява уравнението на струната и началните условия (за граничните това е очевидно).

Редактирано от Емил Хорозов