Тема 12

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.

Анотация

Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.

1. Разглежда се диференциалното уравнение от n-ти ред

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+...+a_n(t)x=f(t),\ t\epsilon(\alpha,\beta)$$

където $a_j(t)$ са непрекъснати функции. Формулира се (без доказателство) теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. Дава се критерий за линейна независимост на система от *n* решения на хомогенното уравнение чрез детерминантата на Вронски. Дефинира се понятието фундаментална система от решения и се доказва, че решенията на хомогенното уравнение (т.е. *f(t)* ≡ *0*) образуват *n* -мерно линейно пространство. Описва се структурата на решенията на нехомогенното уравнение.

2. Формулира се алгоритъм за намиране на общото решение на уравнението с постоянни коефициенти $a_j \epsilon R$

1.

Дефициния 1.1

Уравнения от вида

(1) $L(x)=a_0(t)x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+...+a_n(t)x=f(t), t\epsilon(\alpha,\beta)$,

където коефициентите $a_\nu, \nu=0,1,...,n$ и f са комплексни функции на реалната променлива t, дефинирани и непрекъснати в интервала $(a,b)\subset R$ (интервала може и да е затворен, безкраен) са линейни. $L(x)$ е оператор, който е дефиниран за n-гладки функции. Освен това се предполага, че $a_0(t)\neq 0$ в целия интервал. Понеже е различно от нула, можем да разделим на него и да считаме че коефициента пред $x^{(n)}$ е 1.

Основната задача, която се решава в теорията на линейните обикновени диференциални уравнения е задачата на Коши:

Дадени са произволна n-орка от комплексни числа $\{x_0^{(k)}\}_{k=0}^{n-1}$ ***и*** $t_0\epsilon(a,b)$ ***. Да се намери решение на (1), удовлетворяващо допълнитените условия***

$(2)\, x(t_0)=x_0, x'(t_0)=x_0^{(1)},...,x^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}$

Най- важния резултат в теорията на линейните уравнения е

Теорема 1.1 **(съществуване и единственост)**

Задачата (1) при допълнителните условия (2) има единствено решение и то в цяла околност на t_0

(без д-во)

Тази теорема се извежда от по- общата теорема за съществуване и единственост на линейна система от обикновени диференциални уравнения. Причината е, че линейните уравнения се представят като система.

Нека първо разгледаме уравнението

(3) $L(x)=a_0(t)x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+...+a_n(t)x=0, t\epsilon(\alpha,\beta)$,

Теорема 1.2

Решенията на уравнението (3) образуват линейно пространство над полето на комплексните числа.

Доказателство:

Нека x_1, x_2 са решения на (3). Нека c_1, c_2 са 2 на брой произволни комплексни числа.

Трябва да докажем, че $c_1 x_1 + c_2 x_2$ също е решение на (1).

$$L(c_1 x_1 + c_2 x_2) = \sum_{i=0}^{n} a_i (c_1 x_1 + c_2 x_2)^{(n-i)} = c_1 \sum_{i=0}^{n} a_i x_1^{(n-i)} + c_2 \sum_{i=0}^{n} a_i x_2^{(n-i)} = c_1 L(x_1) + c_2 L(x_2)$$

Но понеже x_1, x_2 са решения, то $L(x_1) = L(x_2) = 0$.

Дефиниция 1.1 **(линейна независимост в пространството от функции)**

Казваме, че функциите $\{f_i\}_{i=1}^{k}$, дефинирани в (a, b) са линейно независими в (a, b) ако

от $\sum_{i=1}^{k} c_i f_i \equiv 0$ за някакви k комплексни числа в този интервал следва, че те са нули.

Дефиниция 1.2 **(фундаментална система за (3))**

Казваме , че за уравнението (3) функциите $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ образуват фундаментална система, ако са линейно независими.

Заб. Не е случайно, че фундаментална система наричаме набор от точно n такива функции (колкото е степента на уравнението). Както ще се окаже, такава фундаментална система образува база на пространството от решения.

Дефинция 1.3 **(детерминанта на Вронски)**

Нека функциите $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ са поне n-1 гладки в (a, b). Детерминанта на Вронски за $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ във всяка точка t от (a, b) дефинираме по следния начин:

$$W(t) = Det\begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_2'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Теорема 1.3

Нека $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ са някакви решения на (3) и W(t) е Вронскияна за тази система. Тогава следните твърдения са еквивалентни.

$a¿\ \exists t_0 \epsilon (a, b) : W(t_0) \neq 0$

б)системата $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ *е фундаментална* *в)* $\forall t \epsilon (a,b): W(t) \neq 0$

<u>Доказателство:</u> а->б , б->в, в->а

<u>а->б</u>

Нека $t_0 \epsilon (a,b): W(t_0) \neq 0$. Допускаме, че системата не е фундаментална. Следователно съществува ненулева комбинация от n комплексни числа, такава че $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$

Да диференцираме равнството n-1 пъти. Получаваме системата

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i' = 0$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n-1)} = 0$$

Детерминантата и в т. t_0 е $W(t_0) \neq 0$. Следователно системата има единствено решение. Вижда се , че то е нулево. Но това е противоречие.

<u>б->в</u>

Нека $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ е фундаментална система, но въпреки това $\exists t_0 \epsilon (a,b): W(t_0) = 0$. Да разгледаме отново системата

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_0) = 0$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n-1)}(t_0) = 0$$

Относно комплексните числа $\{c_i\}_{i=1}^{n}$. Нейната детерминанта е 0 и следователно съществува ненулево решение $\{C_i\}_{i=1}^{n}$. Да разгледаме функцията $\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$. Но понеже уравнението е линейно от това, че $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ са решения на (3) следва, че и η

също е. Системата, която разгледахме, може да се разгледа като система $\eta(t_0)=\eta'(t_0)=..=\eta^{(n-1)}(t_0)=0$. Съставихме задача на Коши за η и (3). Според теоремата за съществуване и единственост тя има единствено решение. Лесно се вижда, обаче, че константата $\eta=0$ е решение. То е единственото такова. Следователно $\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$ =0, т.е. $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ не е фундаментална, което е противоречие.

в->а

$\forall t \epsilon (a,b): W(t) \neq 0$ => $\exists t_0 \epsilon (a,b): W(t_0) \neq 0$

Теорема 1.4

Линейносто пространство L , образувано от решенията на (3) има размерност n и всяка фундаментална система на (3) е негова база.

Доказателство:

Нека $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ е фундаментална система, а x(t) е произволно решение на (3). Да разгледаме системата относно $\{C_i\}_{i=1}^{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t_0)=x(t_0)$$

$$\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(n-1)}(t_0)=x^{(n-1)}(t_0)$$

Тя има единствено решение. Нека разгледаме $\eta(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$. Имаме

$$\eta(t_0)=x(t_0);\eta'(t_0)=x'(t_0);\dots;\eta^{(n-1)}(t_0)=x^{(n-1)}(t_0)$$

Но от теоремата за съществуване и единственост следва, че $\eta \equiv x$. Следователно $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ е база

Да разгледаме сега задачата (1) когато дясната част е ненулева.

Теорема 1.5 **(Характеризация на решенията на(1))**

Нека x_0 е някакво решение на (1) (наричаме го частно) . Нека $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ е фундаментална система от решения на (3). Тогава за всяко решение x(t) на (1) съществуват константи $\{C_i\}_{i=1}^{n}$, че

$$x(t)=x_0(t)+\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$$

Доказателство:

Да разгледаме $\eta(t)$ = $x(t)-x_0(t)$. Тази функция е очевидно решение на (3). Според теорема 1.4 тя се разлага по базиса $\{x_i\}_{i=1}^{n}$. Теоремата е доказана.

Заб. Пространството на решения на (1) се нарича афинно – то е пространството L *, транслирано с някакъв вектор (в случая функция)* x_0 .

2.

Разглеждаме уравнението с постоянни коефициенти

(*) $x^{(n)}+a_1 x^{(n-1)}+\ldots+a_n x=f(t),\ t\epsilon(\alpha,\beta)$

2.

АЛГОРИТЪМ ЗА РЕШАВАНЕ НА (*) :

1. Решаване на $x^{(n)}+a_1 x^{(n-1)}+\ldots+a_n x=0$

1.1 Образуваме характеристичния полином $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+..+a_n$

1.2 Решаваме уравнението $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+..+a_n=0$ - намираме комплексните корени $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$

1.2.1 за всеки прост корен λ_j съпоставяме решение $e^{\lambda_j x}$

1.2.2 Нека λ_j е корен с кратност k. На него съпоставяме решенията $\{e^{\lambda_j x}, x e^{\lambda_j x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_j x}\}$

1.2.3 По схемата 1.2.1 и 1.2.2 сме генерирали точно n решения. Те са фундаментална система и образуваме общото решение на хомогенното уравнение

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)$$

2. Намиране на частно решение

2.1 Директно или по някой нетрадиционен начин, например чрез квазиполиноми*

2.2 Метод на Лагранж.

Ако в задачата се изисква отделяне на реалните решения – мини към т.4 и тогава се върни към 2.2

Образуваме системата

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i(t)=0$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i'(t)=0$$

$$\ldots$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(t)\, x_i^{(n-1)}(t)=f(t)$$

И се опитваме да я решим- теоретично това е възможно, тъй като имаме детерминанта на Вронски.

2.3 Интегрираме решенията $\{C_i'\}_{i=1}^{n}$ неопределено без свободни коефициенти и получаваме $\{C_i^{¿}\}_{i=1}^{n}$.

2.4 образуваме частното решение $x_0(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i^{¿}(t)\, x_i(t)$

3. Намиране на решение на (*)

Решението на (*) е $x(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i x_i(t)+\sum_{i=1}^{n} C_i^{¿}(t)\, x_i(t)$, където $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ са произволни комплексни константи.

4.Отделяне на реалните решения

4.1 Отделяме реалните от комплексните корени на характеристичното уравнение.

4.2 Комплексните са четен брой – два по два спрегнати. Те пораждат решения от вида $C_1 e^{a_j+ib_j}+C_2 e^{a_j-ib_j}$. Реалните решения, които се отделят от тези две ЛНЗ решения са

$e^{a_j}\left(A\cos\left(b_j\right)+B\sin\left(b_j\right)\right)$.

4.3 Реалните решения просто получават „реални константи”.
4.4 Сумираме реалноотделените решения от 4.2 и 4.3 .

Забележка: Препоръчвам да се учи по темата на Хорозов – чрез теоремата за хомеоморфизмите. В тази липсва доказателство, че съществува ФСР и следователно темата е непълна.

Литература:
[1] Обикновени диференциални уравнения, Т. Генчев
[2] Записки от лекциите по ДУ, спец. математика, Е. Хорозов

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.