Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.

(Примерно развиване на въпроса за държавен изпит)

1. Задача на Коши. Разглеждаме линейното ОДУ от n-ти ред

$$L(x) \ := \ x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\, \dot{x} + a_n(t)\, x \ = \ f(t) \ , \tag{1}$$

където $a_1,\, a_2,\, \ldots, a_n$ са непрекъснати функции на времето t в някакъв интервал (α, β).

Теорема за съществуване и единственост. *За произволни $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, t_0 \in \mathbb{R}$, задачата на Коши*

$$\left| \begin{array}{ll} x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\, \dot{x} + a_n(t)\, x \ = \ f(t) & \text{– уравнение (1)} \\ x(t_0) = \xi_1, \quad \dot{x}(t_0) = \xi_2, \ \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = \xi_n & \text{– начални условия} \end{array} \right. \tag{2}$$

има единствено решение, дефинирано върху интервала (α, β)

Доказателството на горната теорема може да бъде реализирано например след като сведем уравнението (2) до система от n линейни ОДУ от първи ред.

2. Линейни хомогенни уравнения. Частен случай на уравнението (1) е когато дясната част $f(t) \equiv 0$, т.е. на *хомогенно* уравнение

$$L(x) \ = \ x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)\, \dot{x} + a_n(t)\, x \ = \ 0 \ . \tag{3}$$

Основният резултат в теорията на линейните ОДУ е следната

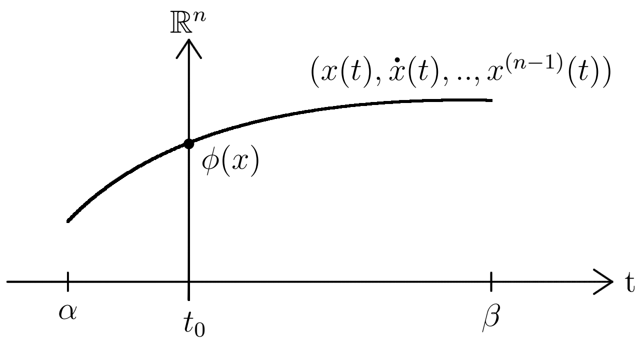
Теорема за структурата на решенията. *Множеството M от решенията на уравнението $L(x) = 0$ е изоморфно на линейното пространство $\mathbb{R}^n$.*

Доказателство. Най-напред ще покажем, че M е линейно пространство. Наистина, ако x и y са решения на (3), а $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, то $\lambda x + \mu y$ също е решение на (3):

$$L(\lambda x + \mu y) \ = \ \lambda\, L(x) + \mu\, L(y) \ = \ 0 \ .$$

Построяваме изображението ϕ от M в $\mathbb{R}^n$, което съпоставя на всяко решение началните данни на решението в точката t_0. С формули това изразяваме така:

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ M & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x(t) & \mapsto & \big(x,\, \dot{x},\, \ldots,\, x^{(n-1)}\big)_{|t=t_0} = \big(x(t_0),\, \dot{x}(t_0),\, \ldots,\, x^{(n-1)}(t_0)\big). \end{array}$$



Ще докажем, че ϕ е търсеният изоморфизъм. Това ще стане в три стъпки.

Първо, ϕ е линеен хомоморфизъм:

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x+\mu y) &= \big(\lambda x+\mu y,\, \lambda\dot{x}+\mu\dot{y},\, \ldots,\, \lambda x^{(n-1)}+\mu y^{(n-1)}\big)_{|t=t_0}\\ &= \lambda\big(x,\, \dot{x},\, \ldots,\, x^{(n-1)}\big)_{|t=t_0}+\mu\big(y,\, \dot{y},\, \ldots,\, y^{(n-1)}\big)_{|t=t_0}\\ &= \lambda\,\phi(x)+\mu\,\phi(y)\ .\end{aligned}$$

Второ, тъй като за всеки набор $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$ задачата на Коши (2) с дясна част $f\equiv 0$ има решение, то ϕ е сюрективно.

И трето, при $\xi_1=\cdots=\xi_n=0$ задачата (2) с дясна част $f\equiv 0$ има единствено решение. Следователно ядрото $\mathrm{Ker}(\phi)=\{0\}$, т. е. ϕ е инективно.

Теоремата е доказана. $\square$

3. Дефиниция. *Фундаментална система от решения* (ФСР) на уравнението (3) наричаме който и да е базис $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ в пространството от решения на това уравнение.

Еквивалентно е да кажем, че всяко решение $x=x(t)$ се представя еднозначно като линейна комбинация (с постоянни коефициенти $C_1,C_2,\ldots,C_n$) на $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$:

$$x(t) \;=\; C_1\,x_1(t)+C_2\,x_2(t)+\cdots+C_n\,x_n(t)\ .$$

От доказателството на теоремата за структурата на решенията следва, че набор от решения $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ е ФСР за (3) тогава и само тогава, когато *детерминантата на Вронски*

$$\Delta(t) \;:=\; \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \ldots & x_n(t)\\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) & \ldots & \dot{x}_n(t)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t)\end{vmatrix} \;\neq\; 0\ ;$$

на практика е достатъчно да проверим за само за някое t_0, че $\Delta(t_0)\neq 0$.

Наистина, ако $\Delta(\tau)=0$ за някое τ, то съществува нетривиална (не всички C_k са нули) линейна комбинация $x:=\sum_{k=1}^n C_k\,x_k(t)$ и такава, че $x(\tau)=\dot{x}(\tau)=\cdots=x^{(n-1)}(\tau)=0$. Но нулеви начални условия има само решението $x(t)\equiv 0$. Оттук и производните $x^{(m)}(t)\equiv 0$, следователно $\Delta(t)\equiv 0$ и $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ **не** е ФСР.

Накрая, доказателството на теоремата ни дава и следния алгоритъм за построяване на ФСР. Избираме начален момент, например $t_0=0$. След това избираме линейно независими начални данни, например $x_k^{(k-1)}(0)=1$ за всяко k, а останалите $x_k^{(m)}(0)=0$. Решенията на съответните n задачи на Коши (2) с нулева дясна част ни дават ФСР $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

4. Нехомогенни уравнения с променливи коефициенти. Доказаното дотук ни дава възможност да определим структурата на решенията на уравнението (1)

$$L(x) \;=\; f\,.$$

Нека $x_0=x_0(t)$ е решение на (1) - такова съществува съгласно формулираната теорема за съществуване. Нека $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ е ФСР за хомогенното уравнение $L(x)=0$.

Тогава решенията x на нехомогенното уравнение $L(x) = f$ се задават с формулата

$$x(t) \;=\; x_0(t) + C_1\, x_1(t) + \dots + C_n\, x_n(t)$$

за произволни константи $C_1, \dots, C_n$.

Действително, $x - x_0$ е решение на хомогенното уравнение

$$L(x - x_0) \;=\; L(x) - L(x_0) \;=\; f(t) - f(t) \;=\; 0$$

и следователно се изразява линейно чрез фиксираната ФСР.

5. Уравнения с постоянни коефициенти. Разглеждаме уравнението

(4) $$x^{(n)} + a_1\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n\, x \;=\; 0\ ,$$

където a_i са реални константи. Търсим *реалните решения*: за реални t, функцията $x = x(t)$ взима реални стойности.

Съгласно теоремата за структурата, решенията на (4) образуват n-мерно линейно пространство. За разлика от общия случай, за (4) винаги можем посочим фундаментална система от решения $\{x_1, \dots, x_n\}$, където x_i са изразени чрез елементарни функции на t, а именно експоненти, косинуси и синуси.

За намирането на ФСР се изисква първо да решим алгебричното уравнение

(5) $$\lambda^n + a_1\, \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\, \lambda + a_n \;=\; 0\ ,$$

наричано *характеристично уравнение* на (4).

Нека $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ са корените на характеристичното уравнение. Между тях може да има кратни; може да има и комплексни корени. Известен факт от алгебрата е, че ако λ е комплексен корен с кратност k, то и комплексно спрегнатото му $\overline{\lambda}$ е корен на (5) със същата кратност k.

Чрез корените на (5) лесно построяваме фундаментална система от решения. В зависимост от изброените по-горе варианти,

– на прост реален корен λ съответства частното решение $e^{\lambda t}$,

– на s-кратен реален корен λ съответстват s частни решения

$$e^{\lambda t},\ t\, e^{\lambda t},\ \dots,\ t^{s-1}\, e^{\lambda t},$$

– на двойка комплексно спрегнати прости корени $\lambda = \alpha + i\beta$ и $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ съответстват две реални решения

$$e^{\alpha t}\, \cos\beta t\ ,\quad e^{\alpha t} \sin\beta t\,,$$

– на s-кратен корен $\lambda = \alpha + i\beta$ и s-кратния корен $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ съответстват $2s$ реални решения

$$e^{\alpha t} \cos\beta t,\ t e^{\alpha t} \cos\beta t,\ t^2 e^{\alpha t} \cos\beta t,\ \dots,\ t^{s-1} e^{\alpha t} \cos\beta t\,,$$

$$e^{\alpha t} \sin\beta t,\ \ t e^{\alpha t} \sin\beta t,\ \ t^2 e^{\alpha t} \sin\beta t,\ \ \dots,\ t^{s-1} e^{\alpha t} \sin\beta t\,.$$

Фундаменталната система от решения $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ формираме от изписаните по-горе частни решения. Общото решение (4) на е

(6) $$x \;=\; C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \ldots + C_n x_n(t)\ ,$$

където C_i са произволни реални константи.

Редактирано от Ангел Живков и Емил Хорозов