Тема 11

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе

Анотация

Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе

1. Векторна функция.
2. Линии. Естествен параметър на линия. Дължина на дъга.
3. Триедър и формули на Френе на линия в пространството. Кривина и торзия. Инварианти на линия.

<u>Дефиниция 1.1</u> (векторна функция)

Векторна функция на скаларен аргумент q наричаме изображение, което на всяко q от интервал $J \subset R$ съпоставя вектор x(q) от R^n, n=1,2,..

Ще разглеждаме n=3. Нека $Oe_1 e_2 e_3$ е ортонормирана координатна система в тримерното реално пространство R^3. Тогава можем да представим векторната функция x(q) на скаларена аргумент по следния начин

$$x(q)=\sum_{i=1}^{3} x_i(q)\, e_i = x_i e_i$$

Последното в записа е според *стандартната конвенция* за кратък запис на сумите в диференциалната геометиря. По този начин векторната функция се определя от три реалнозначни функции $\{x_i(q)\}_{i=1}^{3}$ с общ дефиниционен интереал J.

Изхождайки от това представяне можем да дефинираме „непрекъсната” и „диференцируема” векторна функция съответно при непрекъснатост и диференцируемост на компонентните функции. За производна на векторната функция x(q) считаме

$$\dot{x}(q)=\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i(q)\, e_i = \dot{x}_i e_i$$

<u>Дефиниция 1.2</u> (гладка векторна функция)

Казваме, че векторната гункция x(q) е r-гладка и записваме $x \epsilon C^r$ ако и трите функции $\{x_i(q)\}_{i=1}^{3}$ притежават непрекъснати производни от ред r. При r=1 функцията се нарича просто „гладка”.

<u>Твърдение 1.1</u> (формула на Тейлър за векторна функция)

Нека векторната функция x е n- гладка, $n \geq 1$, е дефинирана в затоврен интервал J. Нека q_0 е вътрешна точка за J , а $q \epsilon J$. В сила е формулата на Тейлър

$$x(q)=x(q_0)+\frac{q-q_0}{1!}\dot{x}(q_0)+\frac{(q-q_0)^2}{2!}x^{(2)}(q_0)+..+\frac{(q-q_0)^n}{n!}x^{(n)}(q_0)+(q-q_0)^n \xi(q) ,$$

където $\xi(q) \underset{q \to q_0}{\to} 0$

Спред конвенцията за запис скаларно произведение на векторни функии се бележи с „.” или с нищо. Векторно произведение се бележи със знака за конюнкция, а смесеното произведение се записва или в като наредена тройка в скоби, или като последователност от 3 символа без знак.
След това уточнение изброяваме основните свойсва за диференцируеми векторни функции.

За всеки векторни функции x, y, z и λ,μ скалари и скаларна функция f, са в сила свойствата:

$1¿(\lambda x+\mu y)^{\cdot}=\lambda\dot{x}+\mu\dot{y}$

$2¿(fx)^{\cdot}=\dot{f}x+f\dot{x}$

$3¿(xy)^{\cdot}=\dot{x}y+x\dot{y}$

$4¿(x\wedge y)^{\cdot}=\dot{x}\wedge y+x\wedge\dot{y}$

$5¿(xyz)^{\cdot}=\dot{x}yz+x\dot{y}z+xy\dot{z}$

Всяка векторна функция можем да предсавим като произведение на скаларна функция по векторна функция с единична дължина. Този вектор се нарича посока на функцията, а скаларната функция се нарича големина.

Теорема 1.1 (НДУ за постоянна посока)

НДУ една гладка векторна функция да има постоянна посока е $x\wedge\dot{x}=0$ за всяко q от дефиниционния интервал.
Доказателство:

(=>)Нека x има постоянна посока, т.е $x(q)=\lambda(q)\overset{-¿}{x}_0$. Имаме $\dot{x}(q)=\dot{\lambda}(q)\overset{-¿}{x}_0$. Да образуваме векторното произведение : $x\wedge\dot{x}=\lambda\dot{\lambda}(\overset{-¿}{x}_0\wedge\overset{-¿}{x}_0)=0$

(<=) Нека имаме $x\wedge\dot{x}=0$ и x не се нулира. Тогава съществува скаларна функция $\mu(q):\dot{x}(q)=\mu(q)x(q)$. Да умножим скаларно по x(q) и да изразим μ : $\mu(q)=\frac{x\dot{x}}{x^2}$.

От тук следва, че $\mu\, е\, непрекъсната$. Да положим $\psi(q)=e^{\int_{q_0}^{q}\mu(q)dq}$. Ясно е, че

$\dot{\psi}(q)=\mu(q)\,\psi(q)$. Да диференцираме частното $\left(\frac{x}{\psi}\right)$:

$$\left(\frac{x}{\psi}\right)^{\cdot}=\frac{\dot{x}\,\psi-x\,\dot{\psi}}{\psi^2}=\frac{\mu x\psi-x\,\mu\psi}{\psi^2}=0$$

<u>Теорема 1.2</u> (НДУ за постоянна дължина)

НДУ за една гладка векторна функция да има постоянна дължина е $\dot{x}\,x$

<u>Доказателство:</u>

(=>) Нека функцията има постоянна дължина l>0. $x^2=l$. Да диференцираме : $2\,\dot{x}\,x=0$

.

(<=) Нека $\dot{x}x=0$ за всяко q от дефиниционния интервал. Тогава за всяко q $2\,\dot{x}\,x=0$.

Но тогава $2\,\dot{x}\,x=0 \rightarrow \frac{d}{dx}\,x^2=0 \rightarrow \exists l>0\; x^2=l$

2.

<u>Дефиниция 2.1</u> (линия/ крива)

Линия(крива) в пространството наричаме всяко изображение c : J-> R, дефинирана в интервал J. Често самото множество от образи на това изображение се нарича линия. Аналитично, линиите се задават с векторни функции на скаларен аргумент. Записваме $c\colon x=x(q), q \epsilon J$

Това уравнение се нарича векторно- параметрично за c. Казва се, че „c е параметризирана спрямо поараметъра си q”.

Казваме, че линията c е r- гладка , ако векторната функция на c е r- гладка и освен това производната и не се анулира никъде в интервала.

<u>Теорема 2.1</u> (дължина на дъга)

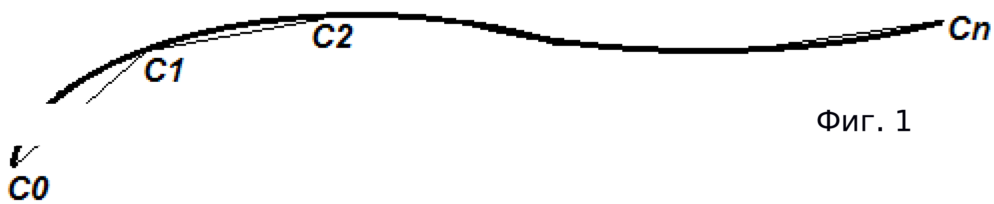
Нека [a,b] е подинтервал на J за гладката линия $c: x = x(q), q \epsilon J.$ Дължината на кривата описана за стойностте на параметъра в този интервал , $c\text{¿}_{[a,b]}$, се дава с формулата

$$c\text{¿}_{[a,b]} = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(q)}\, dq$$

<u>Доказателство:</u>

Да разбием интервала [a,b] : $a = q_0 < q_1 < \ldots < q_n = b, q_i = q_{i-1} + dq_{i-1,} i = 1, .., n$

На тези стойности отговарят точките от линията $C_0, C_1, \ldots, C_n$. Да построим отсечките, които свързват всеки 2 последователни точки (фиг 1). Разтоянието от точка C_i до C_{i+1} е $\sqrt{(x(q_i + dq_i) - x(q_i))^2}$. Да образуваме сумата от всички такива разтояния – тя е



Фиг. 1

приближение на самата дължина на дъгата.

$$L \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x(q_i + dq_i) - x(q_i))^2} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{x(q_i + dq_i) - x(q_i)}{dq_i}\right)^2}\, dq_i$$

Нека n клони към безкрайносто и диаметъра на разбиването клони към 0: тогава сумата , която получихме клони към $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(q)}\, dq$.

<u>Дефиниция 2.2</u> (крива в естествен параметър)

Казваме, че линията c е записана в естествен параметър, ако обхождането и е със скорост 1. Това означава, че ако $c: x = x(s), s\epsilon I, \text{то}\, \dot{x}^2 = 1$.

Нека c е записана първоначално в произволен параметър q. Да въведем функцията $s(q) = \int_{q_0}^{q} \sqrt{\dot{x}^2(q)}\, dq$ - дължина на обходена дъга; мени се от 0 до дължината на цялата линия. Ще покажем, че ако параметризираме x чрез s , това ще е естествена параметризация. Първо да отбележим, че s(q) е биекция и може да се обърне – q(s) е обратната и. Да разгледаме параметризацията x(s)=x(q(s)). Имаме $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2=\left(\frac{dx}{dq}\right)^2\left(\frac{dq}{ds}\right)^2$.

Но от дефиницията на s(q) имаме $\frac{dq}{ds}=\frac{1}{s'(q)}=\frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(q)}}$ (правило за диференциране на обратна функция) Следователно $\frac{dx}{ds}$ =1.

<u>Теорема 2.2</u>
За всеки два естествени параметъра на крава c, s и r, съществува константа, равна на разликата им.

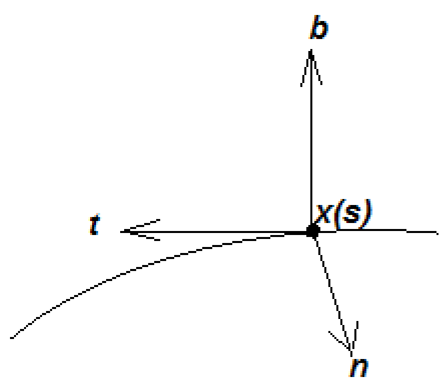
3.

Разглеждаме двукратно гладката линия x(s) , зададена в естествен параметър. По конвенция, производните по естествения параметър се бележат с ‘ , ‘’, ‘’’ ,.., докато производните по други параметри – с точки. Производната x’(s) е единичен вектор, насочен по допирателната към кривата c. Бележим с t(s)=x’(s). Да диференцираме единичния вектор t(s). Получаваме перпендикулярен на него. Дължината на новополучения вектор се нарича *кривина* на кривата .

Бележим $\kappa(s)=¿t'(s)\vee¿$. Ако кривината е ненулев в точка x(s), дефиниран е единичния вектор n,

$$n(s)=\frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

Правата през точка x(s) , колинеарна с n(s) се нарича главна нормала на кривата. До тук имаме, че n и t са перпендикулярни, когато n е определена. Правата през x(s), колинеарна на $t(s)\wedge n(s)$ се нарича бинормала на линията. Дефинирахме тройка единични вектори, които образуват ортонормирана координатна система във всяка точка x(s) от линията. Тази тройка се нарича триедър на Френе за двукратно гладка крива. Равнината, определена от t и n се нарича оскулачна, от b и n – нормална, от t и b –



Фиг. 2

Ще изведем т.нар. формули на Френе, които представляват разлагане на производните (t’, n’, b’) по ортонормирания базис (t, n, b) за всяко s. Имаме

$$t' = a_{11}\, t + a_{12}\, n + a_{13}\, b$$

$$n' = a_{21}\, t + a_{22}\, n + a_{23}\, b$$

$$b' = a_{31}\, t + a_{32}\, n + a_{33}\, b$$

Да умножим първото уравнение по t. (n,t)=(b,t)=0. Също (t',t)=0 , понеже $t^2=1$. Следователно $a_{11}=0$. Аналогично получаваме $a_{22}=a_{33}=0$. Да умножим сега първото тъждество скаларно по b. Да умножим сега първото равенство с n, второто с t, и да ги съберем. Получаваме

$$0=(tn)' = t'n + tn' = a_{12}+a_{21}$$

Аналогично $a_{31}+a_{13}=a_{23}+a_{32}=0$. От самото извеждане на формулите имаме, че $t'=\kappa(s)\, n$. Следователно $a_{31}=a_{13}=0$ и $a_{21}=-\kappa(s)$. Остана един неопределен „коефициент”. Да означим $\tau(s)=-a_{32}$, $\tau(s)$ се нарича торзия на кривата. Окончално получихме връзките

$$t' = +\kappa n$$

$$n' = -\kappa t + \tau b$$

$$b' = -\tau n$$

Извежда се, че $\kappa=\sqrt{(x'')^2},\ \tau=\dfrac{x'x''x'''}{(x'')^2}$

Когато параметъра не е естествен, формулите са

$$¿\dot{x}\vee¿;\ \tau=\frac{\dot{x}\ddot{x}\dddot{x}}{(\dot{x}\times\ddot{x})^2}$$

$$¿\dot{x}\times\ddot{x}\vee\frac{¿}{¿}$$

$$\kappa=¿$$

<u>Теорема 3.1</u> (инвариантност на t, n, b, κ,τ)

При смяна на параметъра от q на $\overset{¿}{q}$, n , $\kappa\ и\ \tau$ имат свойството инвариантност, т.е. $n(q)=\overset{¿}{n}(\overset{¿}{q}),\ \kappa(q)=\overset{¿}{\kappa}(\overset{¿}{q}),\ \tau(q)=\overset{¿}{\tau}(\overset{¿}{q})$. t и b сменят евентуално само посоката си, т.е.

$$t(q)=\epsilon\,\overset{¿}{t}(\overset{¿}{q}),\ b(q)=\epsilon\,\overset{¿}{b}(\overset{¿}{q}),\ \epsilon=\pm1$$

Кривината и торзията се наричат *скаларни инварианти*, докато t, n, b – *векторни инварианти*.

<u>Теорема 3.2</u> (основна теорема на диференциалната геометрия на линиите)

Нека са дадени две функции $\phi(s) \epsilon C^1, \psi \epsilon C^2$ с общ дефиниционен интервал S. Тогава ако в точка x_0 е дадена положително ориентирана ортонормирана тройка вектори t_0, n_0, b_0, то съществува единствена линия $c \epsilon C^3 : x = x(s), s \epsilon S$, която минава през $x_0 = x(s_0)$ и има в тази точка триедър на Френе координатната система x_0 $t_0 n_0 b_0$; при това в точката $x(s_0)$ кривианата и е $\phi(s_0)$, а торзията и - $\psi(s_0)$.

От тази теорема следва, че трикратно гладките криви се определят изцяло от кривината и торзията си. Те се наричат *естествени уравнения* на кривата.

Литература:

[1] Диференциална геометрия, Грозьо Станилов

[3] Записки от лекциите по ДГ ,спец. ПМ, на Стефан Иванов

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.