Тема 10

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.

Анотация

Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.

Да се докаже теоремата на Лоран за развитие в ред на функция холоморфна във венец. Да се дефинират трите вида изолирани особени точки: отстранима, полюс и съществена особена точка и да се докажат: теоремата на Риман (за отстранима особена точка) и теоремата на Казорати-Вайерщрас – Сохоцки. Да се дефинира резидуум на холоморфна функция в изолирана особена точка и да се докаже теоремата за резидуумите.

Задачи: Определяне вида на изолираните особени точки на холоморфна функция и пресмятане на резидуумите в тях. Пресмятане чрез теоремата за резидуумите на контурни интеграли и на реални несобствени интеграли.

Тема 10

1. Ред на Лоран.

<u>**Теорема 1.1**</u> (холоморфните функции са аналитични)
Нека f(z) е холоморфна в някаква област G и нека т. z_0 е точка от нея. Тогава тя се развива в ред на Тейлор около тази точка и имаме

$$f(z)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j, a_j=\frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{j+1}}d\zeta,$$

$j=0,1,2,..$

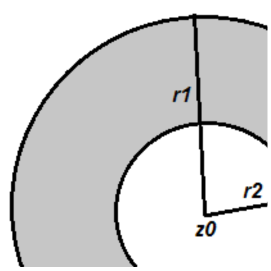
където γ е някаква проста Жорданова, която огражда z_0 и лежи изцяло вътре в G(фиг. 1)
.

Фигура 1.

Редовете на Лоран представляват обобщение на редовете на Тейлор – различното при тях е, че евентуално може да събираеми (краен или безкраен брой) по отрицателните степени на $z-z_0$.

Преди да формулираме теоремата на Лоран да направим няко неформални разсъждения, касаещи сходимостта на безкраен ред по отрицателните степени на $z-z_0$.

Да разгледаме $A=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_i}{(z-z_0)^i}$ и да положим $\zeta:=\frac{1}{z-z_0}$. Получаваме реда $A=\sum_{i=0}^{\infty} b_i\xi^i$. Знаем реда на сходимост на последния ред : $R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}}$. Тоест имаме, че при $¿\xi\vee¿R$ редът е сходящ, а при $|\xi|>R$ редът е разходящ. Какво означава това за $z-z_0?$ Редът $A=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{b_i}{(z-z_0)^i}$ е сходящ при



$¿z-z_0\vee¿\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}$ и разходящ при $|z-z_0|<\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{b_n}$. Получихме, че за разлика от обикновените редове, при които сходимостта е вътре в кръг, тук сходимостта е вън от кръг.

Нека сега си представим, че имаме $C = A + B = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (z - z_0)^i + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{(z - z_0)^i}$. Ако искаме C да е сходящ е достатъчно да са сходящи и A, и B. Това означава

$$|z - z_0| < r_1 = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n}} \text{ и} \vee z - z_0 \vee ¿\, r_2 = \limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{b_n}$$

Ясно е, че при $r_1 \le r_2$ няма да имаме сходимост. Ако $r_1 > r_2$ имаме сходимост във венеца(фиг. 2)

$$r_2 < ¿\, z - z_0 \vee ¿\, r_1$$

Фиг. 2

Теорема 1.2 (Лоран)

Нека f(z) е холоморфна(аналитична) във венеца $r < ¿\, z - z_0 \vee ¿\, R$. Тогава f(z) се развива в ред на Лоран във венеца , имаме

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

. Тук γ_l е междинна окръжност с радиус $r < l < R$

Доказателство:

От теоремата на Коши за облатта – венец имаме, че

$$\gamma_{R' + ¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta$$

$$\gamma_{r' - ¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$$

– обикаляме голямата окръжност правилно, другата – не. Тук r< r’<|z-z$_0$| <R’< R (могат да се изберат такива r’, R’ – Фиг. 3). Нека в първия интеграл преобразуваме

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}}$$

Върху $\gamma_{R ¿}^{+¿}$ имаме

$¿\, z-z_0 \vee \frac{¿}{R'} < 1$

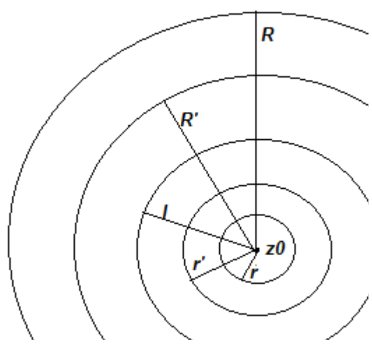
$¿\, \frac{z-z_0}{\xi - z_0} \vee \leq ¿$. Тогава можем да развием по формулата за геометрична прогресия члена

$\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi - z_0}}$.Имаме $\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\xi - z_0}} = 1 + \frac{z-z_0}{\xi - z_0} + \ldots + \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)^k + \ldots$

Получаваме $\frac{f(z)}{\xi - z} = \frac{f(z)}{\xi - z_0} + \frac{z-z_0}{(\xi - z_0)^2} f(z) + \ldots + \frac{(z-z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}} f(z) + \ldots$ Последното е равномерно

сходящ ред. Интегрираме върху $\gamma_{R'¿}^{+¿}$ (теорема на

Вайерщрас) и умножаваме двете страни по $\frac{1}{2\pi i}$.



Получаваме

$$\gamma_{R+¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta + ..$$
$$\gamma_{R+¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta + \ldots + \frac{(z-z_0)^k}{2\pi i} \int_{¿} ¿$$
$$\gamma_{R+¿} \frac{f(z)}{\xi - z_0} d\zeta + \frac{(z-z_0)}{2\pi i} \int_{¿} ¿$$
$$\gamma_{R+¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta \frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$$

Да положим $\gamma_{R+¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}, n = 0,1,2,\ldots$ $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$ Получаваме $\gamma_{R+¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ $\frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$.

Нека сега преработим първия интеграл $\gamma_{r'+¿} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)} d\zeta$ $\gamma_{r'-¿} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$ $\frac{1}{2\pi i} \int_{¿} ¿$. Върху ''

Фиг. 3

$\frac{1}{z-\zeta}=\frac{1}{z-z_0+z_0-\zeta}=\frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$, $¿z-z_0\vee¿<1$ $¿\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\vee¿\frac{r'}{¿}$. Аналогично развиваме

$\frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$ като геом. прогресия; След умножаване по $f(\zeta)$ получаваме

$$\frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)}=\frac{f(\zeta)}{z-z_0}(1+\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}+...+(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0})^k+...)=\frac{f(\zeta)}{z-z_0}+\frac{f\ (\zeta)(\zeta-z_0)}{(z-z_0)^2}+...+\frac{f\ (\zeta)(\zeta-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}+...$$

Интегрираме върху окръжността $\gamma_{r'}$

$$\gamma_{r'-¿}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}d\zeta=\frac{(z-z_0)^{-1}}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^0}d\zeta$$ +

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{¿}¿$$

$$+\frac{(z-z_0)^{-2}}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-1}}d\zeta+...+\frac{(z-z_0)^{-(k+1)}}{2\pi i}\int_{\gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-(k)}}d\zeta+..$$

Да положим $b_n=a_{-n}=\int_{\gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n-1}},n=1,2,3..$ Нека r'<l <R'. Ясно е, че

$$\int_{\gamma_{r'}}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n-1}}=\int_{\gamma_l}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n-1}},n=1,2,...\ и\int_{\gamma_R}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\int_{\gamma_l}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}},n=0,1,2,...$$

Получихме исканото : $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta,n=0,\pm1,\pm2,..$

2. Особени точки. Теореми на на Казорати-Вайерщрас – Сохоцки, Риман

__**Дефиниция 2.1**__ : Казваме, че f има особеност в т. z_0 , ако f не е аналитична в тази точка. Още, z_0 е изолирана особена, ако има околност на z_0, за която f е аналитична навсякъде освен в т. z_0.

Нека имаме особеност в т. z_0. Имаме два случая:

1. f има крайна граница в т. z_0 – казваме, че особеността е „правилна” или отстранима.
2. f няма крайна граница в т. z_0

Във втория случай имаме отново две възможности:

$\lim\limits_{z \to z_0} \text{¿} f(z) \vee \text{¿} \infty$ (z_0 се нарича полюс) или $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ (z_0 е съществена особеност)

Примери: в т. 0+0i $f_1(z)=\frac{1}{z^2}$ клони към безкрайност по абсолютна стойност, докато

$f_2(z)= e^{\frac{1}{z}}$ няма граница : $\lim\limits_{x \to 0,\, x>0} e^{\frac{1}{z}}=\infty, \lim\limits_{x \to 0,\, x<0} e^{\frac{1}{z}}=0$.

<u>Теорема 2.1</u> (Риман)

НДУ т. z_0 да бъде правилна е f(z) да бъде ограничена в околност на т. z_0.

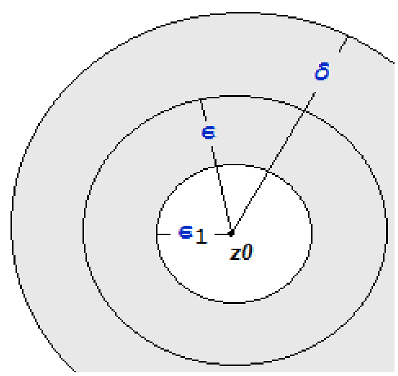
Доказателство:

(<=)Нека f(z) е ограничена в околност на т. z_0, т.е. съществува $\delta>0: 0<\text{¿} z-z_0 \vee \text{¿} \delta \rightarrow \vee f(z) \vee \le M$.

В тази околност f(z) има представяне

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n, a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, n=0, \pm 1, \pm 2, ..$$

Това е така за произволно малко ϵ: $\delta>\epsilon>0$. Това е така, понеже като изберем такова ϵ съществува $\epsilon_1: 0<\epsilon_1<\epsilon$ (фиг. 4) че f е аналитична във венеца $\epsilon_1<\text{¿} z-z_0 \vee \text{¿} \delta$ и коефициентите могат да се изчислят върху междинната окръжност C_ϵ (от теоремата на Лоран)



Да разгледаме коефициентите с отрицателни индекси на f.

$$\text{¿} f(\zeta) \vee \frac{\text{¿}}{\text{¿}(\zeta-z_0)^{n+1} \vee \text{¿} d\zeta} \le \frac{M}{2\pi}\epsilon^{-(n+1)}\int_\gamma d\zeta=\frac{M}{2\pi}\epsilon^{-(n+1)} 2\pi\epsilon = M\epsilon^{-n}, n=-1,-2,$$

$$\text{¿}$$

$$\text{¿} 2\pi i \vee \text{¿} \int_\gamma \text{¿}$$

$$\text{¿} a_n \vee \le \frac{1}{\text{¿}}$$

Но това е за произволно малко ϵ: $\delta > \epsilon > 0$ следователно всички тези коефициенти са 0 и f(z) има само „правилна част" в развитието си : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$

Сега е ясно, че $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$ - имаме крайна граница и z_0 е правилна.

(=>)Обратното, нека точката е правилна, следователно функцията може да бъде направена аналитична в тази точка. Но това означава че е ограничена в околност на тази точка.

<u>Следствие:</u> (Теорема на Риман)

Ако f(z) е холоморфна в областта G с изключение може би на точката a от G, за която функцията не е дефинирана, и ако f е ограничена в G, то винаги е възможно f да се додефинира в т. a по такъв начин, че f(z) да е холоморфна в цялата област G, включително в точка a.

Доказателство (нестрого) :

От теорема 2.1 е ясно, че ако f е ограничена, то $\lim_{z \to a} f(z) = a_0$. Додефинирайки $f(a) \doteq a_0$ ние получаваме аналитична функция понеже f се развива в ред само по положителните си стойности .

Класификация на изолираните особените точки (без доказателство) :

Ще пропуснем отстранимите особени точки, които както видяхме(Теорема 2.1, следствие от нея) всъщност не са особени.

Нека f(z) е холоморфна в областта G с изключение на точката z_0 от G. Нека разгледаме развитието на f в някаква околност на a.

1сл. $f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ (имаме само краен брой членове с отрицателни индекси). В този случай казваме, че z_0 е m- кратен полюс.

2сл. $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ (имаме безкрайно много членове с отрицателни индекси). В този случай z_0 е съществена особеност.

Други видове изолирани особени точки няма.

***<u>Теорема 2.2</u>* (Казорати-Сохотски- Вайерщрас)**

Нека z_0 е съществена особеност за f. Тогава ако означим с $C^{\infty} = C \bigcup \{\infty\}$, то

$$\forall a \epsilon C^{\infty} \quad \exists \{z_n\}_{n=1,2,..} : z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0 \wedge \lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$$

1) Нека a=" ∞ . Ако допуснем, че не съществува редица $\{z_n\}_{n=1,2,..} : z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0 \wedge \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \infty$, то тогава f(z) ще е ограничена в околност на z_0 , което е противоречие.

2) Нека a ϵC . Допускаме, че не съществува редица $\{z_n\}_{n=1,2,..} : z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0 \wedge \lim_{n\to\infty} f(z_n) = a$, т.е.

$$\exists \epsilon > 0 : \forall \delta > 0 |z - z_0| < \delta \wedge ¿ f(z) - a \vee ¿ \epsilon$$

Да означим $\phi(z) = \frac{1}{f(z) - a}$. За нея е в сила $¿ \phi(z) \vee ¿ \frac{1}{\epsilon}$. Тоест ϕ е аналитична в околност на z_0 , която е правилна за нея. Но тогава $f(z) = a + \frac{1}{\phi(z)}$. Ние вече доказахме, че съществува редица от комплексни числа, клоняща към z_0 , за която стойностите на f клонят към безкрайност. Ако приложим тази редица в полученото равенство, получаваме, че ϕ има особеност в т. z_0 (a е крайно). Но това е противоречие.

3. Резидууми. Теорема за резидуумите.

Теорията на резидуумите възниква във връзка с нуждата от изчисляване на интеграли по затворени криви от функции, които във вътрешността на тези криви не са аналитични, а имат краен брой изолирани особености (фиг. 5)

Дефиниция 3.1 (Резидуум на функция в изолирана особена точка)

Нека a е изолирана особеност за f. Нека Г е окръжност с ¿ такъв, че вътре в кръга да няма други особености. **Резидуум** на f в т. a наричаме

Фиг. 5

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) dz$$

Бележим с $Resf¿_a$. Доказва се, че в случай на m-кратен полюс, резудуума на f е коефициента пред индекса „-m" в Лорановото развитие на функцията f.

Теорема 3.1 **(теорема за Резидуумите)**

Нека G е област с граница Г, такава че функцията f е аналитична в G с изключение на краен брой точки $\{a_j\}_{j=1,..,n}$ - изолирани особености. Тогава

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f)\text{¿}_{a_j}$$

Доказателство: Да опишем n кръга около изолираните особености така, че да не се пресичат и да означим с $\{\Gamma_j\}_{j=1,..,n}$ техните контури (фиг. 6). Според теоремата на Коши

Фиг. 6

имаме

$$j=1,..,n$$

$$\int_{\Gamma_{j+\text{¿}} f(z)dz=2} \pi i \sum_{j=1}^{n} Resf\text{¿}_{a_j}$$

$$\{\Gamma_{j\text{¿}} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \text{¿}$$

$$\bigcup \text{¿}$$

$$\Gamma_{+\text{¿}} f(z)\,dz = \int_{\text{¿}} \text{¿}$$

$$\int_{\text{¿}} \text{¿}$$

Пресмятане на резудуум на f в т. а - крайна:

1) прост полюс : $Res(f)\text{¿}_a = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

2) k- полюс : $Res(f)\text{¿}_a = \frac{\lim_{z \to a} d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{(z-a)^k f(z)}{(k-1)!} \right]$

3) В съществено особна точка, коефициента пред $\frac{1}{z-a}$ в Лорановото развитие около т.

А

Литература:

[1] Увод в теорията на аналитичните функции, Л. Чолаков
[2] Теория на аналитичните функции, Т. Аргирова
[3] Записки от лекциите по КА ,спец. ПМ, на Евгени Христов

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.