Тема 9

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Холоморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.

Анотация

Холоморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.

9. Холоморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.

1. Да се дефинират: R - диференцируемост, C - диференцируемост и холоморфност на функция на комлексна променлива. Да се докаже, че уравнението на Коши-Риман и R - диференцируемостта са необходими и достатъчни за C - диференцируемост.

2. Да се дефинира конформно изображение и да се докаже, че ако е f(z) е холоморфна в и z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то изображението *w=f(z)* е конформно в z_0.

3. Да се формулира основната теорема на Коши за едносвързана област. Да се докаже вариантът на теоремата чрез формулата на Грийн. Да се докаже формулата на Коши. За доказателството й да се изпозва наготово (без доказателство) теоремата на Коши за сложен контур.

Задачи: Възстановяване на холоморфна функция по дадена реална (имагинерна) част.

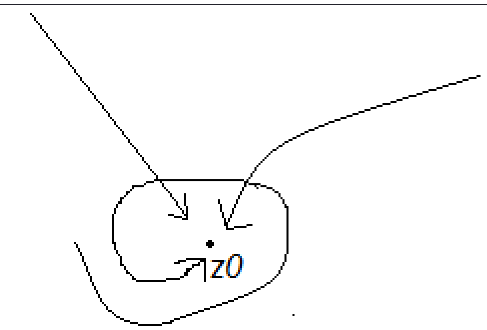
Примерни задачи: 1. Да се намери холоморфна функция *f(z)=u+iv*, за която

a) $u(x,y)=x^2-y^2-e^y\sin(x)$

b) $u(x,y)=\phi(x^2-y^2), \phi\epsilon C^2(D)$

1.

Дефиниция 1.1 Казваме, че комплекснозначната функция f(z) е **C- диференцируема** в т. z_0, ако е дефинирана в цяла нейна околност и съществува число $f'(z_0)$, такова, че $f'(z)=\frac{\lim_{z \to z_0} f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ по всички възможни начини(фиг. 1) едновременно. Това означава, че за всяка крива, по която z се доближава до z_0 получената редица $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ е сходяща и клони всеки път към $f'(z_0)$.



Фигура 1. За Х- диференцируемост е нужно диференчното частно да е сходящо за всевъзможни криви.

Дефиниция 1.2 Казваме, че реалнозначната функция u(x,y)= е **R- диференцируема** в т. z_0
 съществува представянето $\Delta u=u(x,y)-u(x_0,y_0)=A1\,\Delta x+A2\,\Delta y+\epsilon_1\,\Delta x+\epsilon_2\,\Delta y,$ където ϵ_1,ϵ_2 са такива, че при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ имаме $\epsilon_1 \to 0, \epsilon_2 \to 0$.

Ако u е R диференируема се оказва, че има частни производни от първи ред (не задължително непрекъснати) и $\frac{\partial u}{\partial x}=A1$, $\frac{\partial u}{\partial y}=A2$. Също ако за една функция u на две променливи съществуват непрекъснати първи частни производни, то тя е диференцируема в смисъла на дефиниция 1.2

Дефиниция 1.3 Казваме, че за комплекснозначната функция f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y) са изпълнени условията на **Коши- Риман**, ако съществуват първи частни производни на u и v и освен това

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial v}{\partial y}\wedge\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}$$

<u>Дефиниция 1.4</u> Казваме, че комплекснозначната функция f(x+iy)=u(x,y)+i v(x,y) е **аналитична** в т. z_0 ако се развива в безкраен ред на Тейлор в т. z_0.

<u>Дефиниция 1.5</u> Казваме, че комплекснозначната функция f е **холоморфна** в отвореното множество G ако е C-диференцируема във всяка точка от него.

<u>Теорема 1.1</u> Нека комплекснозначната функция f(z) е дефинирана в околност на z_0. Тогава f(z) е C- диференцируема в т. z_0 *тогава и само тогава когато* реалната и имагинерната част на f са R- диференцируеми в т. z_0 и са изпълнение условията на Коши-Риман.

<u>Доказателство:</u>

Необходимост: Нека f е X- диференцируема в т. z_0. Нека пуснем z да клони към z_0 по права, успоредна на оста Rez=Ox. Това клонене става по кривата { (x,y_0) | $x_1 \geq x \geq x_0$ }. Имаме

$$f'(z_0)=\frac{\lim\limits_{h\to 0} f(z_0+h+i0)-f(z_0)}{h+i0}=\frac{\lim\limits_{h\to 0} u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h}+\frac{\lim\limits_{h\to 0} v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h}$$

Понеже имаме диференцируемостта следва, че u_x и v_x съществуват <u>и са непрекъснати</u> в т. x_0

Нека пуснем z да клони към z_0 по права, успоредна на оста Imz=Oy. Това клонене става по кривата { (x_0,y) | $y_1 \geq y \geq y_0$ }. Имаме

$$f'(z_0)=\frac{\lim\limits_{h\to 0} f(z_0+ih)-f(z_0)}{hi}=\frac{\lim\limits_{h\to 0} u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{ih}+\frac{\lim\limits_{h\to 0} v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{ih}$$

Понеже имаме диференцируемостта следва, че u_y и v_y съществуват в т. x_0.

Получихме равенствата

$$f'(z_0)=u_x(x_0,y_0)+i\,v_x(x_0,y_0)=iu_y(x_0,y_0)-v_y(x_0,y_0),$$ тоест

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\,и\,u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)$$

Достатъчност: Частните производни на u и v и са непрекъснати (предположението за непрекъснатост по принцип не е нужно, но ние ще предполагаме така, защото доказателството е по- лесно). Нека са изпълнени условията на Кош- Риман . Да образуваме диференчно частно на f(z)

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{u(x+h,y+k)-u(x,y)}{h+ik}+i\frac{v(x+h,y+k)-v(x,y)}{h+ik}$$

Имаме представянията(u,v са диференцируеми понеже имат C^1 първи производни)

$$u(x+h,y+k)-u(x,y)=h\,u_x+k\,u_y+h\epsilon_1+k\epsilon_2$$

$$v(x+h,y+k)-v(x,y)=h\,v_x+k\,v_y+h\,\epsilon_3+k\epsilon_4$$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{h\,u_x+ku_y+i\,h\,v_x+ik\,v_y+h\,\epsilon_1+k\,\epsilon_2+ih\,\epsilon_3+ih\,\epsilon_4}{h+ik}\overset{Коши-Риман}{=}¿$$

$$¿\frac{(h+ik)(u_x+iv_x)+h\,\epsilon_1+k\,\epsilon_2+ih\,\epsilon_3+ik\,\epsilon_4}{h+ik}=¿\,u_x+iv_x+\frac{h}{h+ik}\epsilon_1+\frac{k}{h+ik}\epsilon_2+\frac{ih}{h+ik}\epsilon_3+\frac{ik}{h+ik}\epsilon_4$$

Ако пуснем(например едновременно и равномерно) h+ik->0+i0 получаваме $f'(z)=\frac{\lim_{z\to z_0} f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ = u_x+iv_x , тъй като четирите суми, умножени по ϵ_i клонят към 0, което пък се дължи на факта, че изразите от вида $\frac{h}{h+ik}$ са ограничени когато h+ik->0

<u>Теорема 1.2</u>

Понятията С-диференцируемост и аналитичност са еквивалентни.

2.

<u>Дефиниция 2.1</u> (конформно изображение в комплексната равнина)

Нека f(z)=w е функция в компленската равнина. Казваме, че изображението, което тя дефинира е **конформно** в т. z_0 ако **запазва ъглите** в тази точка, т.е. за всеки две гладки криви минаващи през z_0 и слкючващи ъгъл α (тангентите им сключват ъгъл α), то и образите на тези криви сключват ъгъл α.

<u>Теорема 2.1</u> (Х-диференцируемите функции са конформни)

Нека w=f(z) е Х-диференцируема и освен това в т. z_0 f'(z_0) $\neq 0$. Тогава f(z) е конформно изображение в точка z_0.

<u>Доказателство:</u>

Нека z_1 е подвижна точка и клони към z_0 . Тогава f(z_1) е подвижна и клони към f(z_1). Нека фиксираме крива С, по която z_1 клон към z_0. Тогава кривата, по която се движи f(z_1) също е фиксирана- да я означим с Г. Имаме, че $\frac{u_1-u_0}{z_1-z_0}=\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}\underset{z_1\to z_0}{\to} f'(z_0)$

Нека $u_1-u_0=R(\cos(\beta)+i sin(\beta))$ и $z_1-z_0=r(\cos(\alpha)+i sin(\alpha))$.Тогава

$\frac{u_1-u_0}{z_1-z_0}=\frac{R}{r}(\cos(\beta-\alpha)+i\sin(\beta-\alpha))$ и при това число клони към

$f'(z_0)=\rho(\cos(\omega)+i\sin(\omega))$ при $z_1 \to z_0$. Следователно $\frac{\lim_{z_1\to z_0} R}{r}=\rho$ и $\lim_{z_1\to z_0}(\beta-\alpha)=\omega+2k\pi$.

Но при $z_1 \to z_0$ е ясно, че α клони към ъгъл α_0, който е ъгъла, който сключва тангентата T към кривата C с оста Rez в точка z_0. Нищо не ни пречи да приемем, че k=0. Тогава получаваме, че при $z_1 \to z_0$ β клони към β_0 = α_0+ ω . Така получихме, че за да намерим тангентата към кривата Γ в точка $f(z_0)$ е достаъчно да завъртим T на подходящ постоянен ъгъл ω .

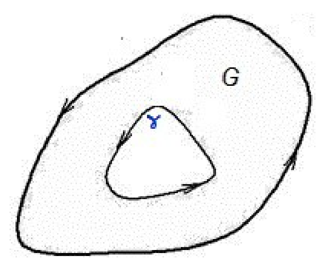
Нека сега C_1 и C_2 са криви, минаващи през z_0, а Γ_1 и Γ_2 са техните образи. Нека тангентата на C_1 в т. z_0 сключва ъгъл α_1 с Rez, а тангентата на C_2 в т. z_0 сключва ъгъл α_2 с Rez. Нека образите на тези тангенти сключват с Rez ъгли β_1,β_2 . От горните разсъждения имаме, че $\beta_1-\alpha_1=\omega=\beta_2-\alpha_2$, т.е. ъгълът между C_1 и C_2 се запазва при действието на f.

3.

Теорема 3.1 (Коши)

Нека G е едносвързана област в C, тоест G е отворено, свързано множество, такова, че всяка Жорданова крива от вътрешността му заграждa област, която е подмножество на G(фиг. 1).Тогава ако f е X-диференцируема, то за всяка Жорданова крива γ във вътрешността на G имаме

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$



Фиг.1

Доказателство:

f(z)=u(x,y)+iv(x,y), където $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\wedge\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}$ и нека параметризираме $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$.

Нека областта, която загражда γ е D. Имаме равенствата

$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_\gamma (u+iv)(dx+idy)=\int_\gamma u\,dx-v\,dy+i\int_\gamma vdx+udy \underset{\text{Грийн}}{\overset{\text{формула на}}{=}} ¿$$

$$\underset{\text{Грийн}}{\overset{\text{формула на}}{¿}} \iint_D -\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy+i\iint_D \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy \underset{\text{Коши}-\text{Риман}}{\overset{\text{формули на}}{=}} ¿0+i0=0$$

<u>Теорема 3.2</u> (на Коши за сложен контур)

Нека G е n+1 свързана област и външната крива на тази област е Г, а вътрешните са $\{\gamma_i\}_{i=1,2,..,n}$. Тогава ако f е аналитична в $G\bigcup\partial G$, то $\Gamma_{+¿} f(z)\,dz+\sum_{i=1}^{n} ¿ \int_{\gamma_{i-¿}} f(z)\,dz=0$ $\int_¿ ¿$. Тук + означава, че Г се обхожда правилно, т.е. обратно на часовниковата стрелка, а – означава че се обхожда по ч.с. (фиг. 2)

Фиг. 2. Пример за многосвързана област при обхождането в теоремата, правилно обходждане

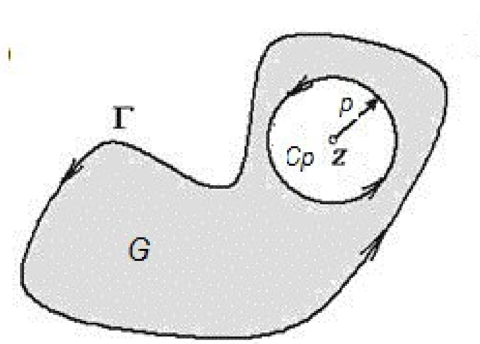
<u>Теорема 3.3</u> (формула на Коши)

Нека f(z) е аналитична(X- диференцируема) в едносвързаната област G и по границата и γ. Тогава за всяка вътрешна точка z от G е в сила формулата

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,dz$$

<u>Доказателство:</u>

Да фиксираме $z\epsilon G$ и да дефинираме функцията $\phi(\zeta):=\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z},\zeta\epsilon G\bigcup\partial G$. Ясно е ,че в



$\overset{¿}{(G\bigcup\partial G)\{z\}}$ ϕ е аналитична. В z ϕ е само непрекъсната. Наистина,

$$\phi(z)=\frac{\lim\limits_{\zeta\to z} f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}=f'(z)$$.

Нека изберем околност- кръг K на z с контур окръжността C_p, която е изцяло в G (фиг. 3) Така в многосвързаната област G\K ϕ е аналитична.

Фиг. 3

Прилагаме в нея формулата на Коши за многосвързана област.

$$C_p+¿\,\phi(\zeta)\,d\zeta$$
$$\Gamma+¿\,\phi(\zeta)\,d\zeta-\int_{¿}¿$$
$$\int_{\Gamma\bigcup C_p}\phi(\zeta)\,d\zeta=0=\int_{¿}¿$$

Но ϕ е непрекъсната и следователно ограничена върху C_p. Следователно

$$¿\,d\zeta\vee¿=M2\pi p\underset{p\to 0}{\to}0$$
$$C_p+¿¿$$
$$|\phi(\zeta)|\vee¿\,d\zeta\vee\le M\int_{¿}¿$$
$$C_p+¿¿$$
$$C_p+¿\,\phi(\zeta)\,d\zeta\vee\le\int_{¿}¿$$
$$¿\int_{¿}¿$$

Тогава имаме след граничен преход p->0, че

$$\Gamma+¿\,\frac{1}{\zeta-z}\,d\zeta=0$$
$$\Gamma+¿\,\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-f(z)\int_{¿}¿$$
$$\Gamma+¿\,\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}\,d\zeta=\int_{¿}¿$$
$$\Gamma+¿\,\phi(\zeta)\,d\zeta=\int_{¿}¿$$
$$\int_{¿}¿$$

Но $\int\limits_{¿} ¿ \, \Gamma + ¿ \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ = $2\pi i$. Следователно $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz$, което трябваше да докажем.

Литература:
[1] Увод в теорията на аналитичните функции, Л. Чолаков
[2] Теория на аналитичните функции, Т. Аргирова
[3] Записки от лекциите по КА ,спец. ПМ, на Евгени Христов

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.