Тема 8

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.

Анотация

Дефиниция на гладка крива в равнината, зададена параметрично; формула за дължината й. Риманови суми за криволинейни интеграли от първи и втори род и свойствата им. Формули за свеждане на криволинейните интеграли към риманови. Доказателство на формулата на Грийн

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = liint¿\overset{¿}{D}¿.\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Да се разгледа първо случаят, когато D може да се представи във вида $\overset{¿}{D} = \{(x, y)\epsilon P^2, x_1 \le x \le x_2, y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$, а функцията Q (x, y) е тъждествено нула, и да се покаже, че горната формула следва от формулата на Лайбниц – Нютон. Да се обясни накратко как от този частен случай се извежда общият случай.

1.Гладка крива, дължина на крива, естествена параметризация на крива

Дефиниция 1.1 (гладка крива)
Гладка крива е ГМТ от точки в равнината или пространството определено от гладка функция α от $\alpha : \Delta \to R^3(R^2)$, $\alpha \epsilon C^1(\Delta)$ и $\dot{\alpha}(t) \neq 0, t\epsilon\Delta$.

Твърдение 1.1 Дължината на гладка крива от R^3 при изменящ се аргумент в интервала [a, b], където $\alpha(a)=A, \alpha(b)=B$ се дава с формулата

$$length(\Gamma_{AБ})=\int_a^b \sqrt{\dot{\alpha}_1^2(t)+\dot{\alpha}_2^2(t)+\dot{\alpha}_3^2(t)}\,dt$$

Нека фиксираме точка от кривата A_0 която отговаря на $t_0 \epsilon \Delta$. Да дефинираме функцията $s(t)=\begin{cases} length(\alpha[t_0,t]), t>t_0 \\ 0 \\ -length(\alpha[t_0,t]), t<t_0 \end{cases}$ Тази функция е „ориентирана дължина" и чрез нея се задава „правилна" посока на обикаляне на дадена крива. $s(t)$ се нарича естествен параметър и от свойствата на интеграла и твърдение 1.1 имаме, че $s(t)=\int_{t_0}^{t} ¿\vee\dot{\alpha}(t)\vee¿\,dt$

, $\dot{s}(t)=¿\vee\dot{\alpha}(t)\vee¿$

$s(t)$ се нарича **естествен параметър**, защото ако параметризираме кривата чрез s вместо t, ще получим „вървене" по кривата с единична скорост.

Наистина, нека t(s) е обратната функция на s(t). Да дефинираме $\alpha(s)=\alpha(t(s)), s\epsilon\Delta_1$, където Δ_1 *е образа на* Δ *под действие на* $s(t)$. Тогава след диференциране $\alpha'(s)=\dot{\alpha}(t(s))*t'(s)$. За да докажем, че дължината на производната по естествения параметър е единица, да диференцираме равенството

$s(t(s)) = s$. Получаваме $\dot{s}(t(s)).t'(s) = 1$. Тогава имаме $t'(s) = \frac{1}{¿\vee\dot{\alpha}(t(s))\vee¿}$.

Следователно

$$\alpha'(s) = \frac{\dot{\alpha}(t(s))}{¿\vee\dot{\alpha}(t(s))\vee¿} \rightarrow \vee¿\,\alpha'(s)\vee¿ = 1$$

2.Криволинеен интеграл от първи род

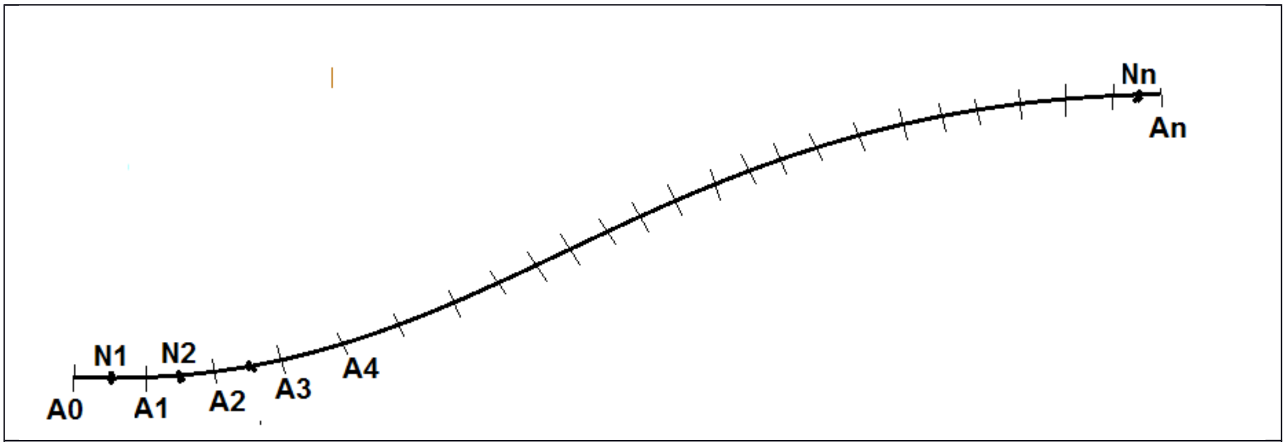
Мотивационна задача:
Имаме ***материална нишка*** *със зададена функция на плътността, която в общия случай не е постоянна по продължение на нишката. Можем ли да пресметем масата и?*

Нека зададем материалната нишка като гладка крива $\alpha(s) = \alpha(t(s))$ и да предположим, че е зададена в естествен параметър. Нека f(s) е непрекъсната функция на плътността. Имаме $t(s):[0,S] \rightarrow [a,b]$, $A = \alpha(a), B = \alpha(b)$

(за отправна точка от кривата е избран единия и край). Да разделим кривата на отделни дъги посредством точките от кривата $A_0 = A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n = B$, отговарящи на стойности на естествения параметър $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} < s_n = S$. Имаме

$A_i = \alpha(s_i), i = 0,1,\ldots,n$

Освен това да изберем представителни точки $\xi_i \epsilon [s_{i-1}, s_i], i = 1,2,..,n$ и отговарящите им точки от кривата $N_i = \alpha(\xi_i), i = 1,\ldots,n$ (фиг. 1)



Фигура 1. Разбиване на крива на парчета

Да образуваме сумата $\sum_{i=1}^{n} f(N_i)\, length(\Gamma_{A_{i-1},A_i}) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha(\xi_i))(s_i - s_{i-1})$.

От една страна всяко събираемо е приближената линейна маса на участъка си, а от друга, имаме Риманова сума върху интервала [0,S] на функцията $(f \circ \alpha)(s)$ с разбиване $\pi = \{s_i\}_{i=0,1,..,n}$.

Ясно е, че $\sum_{i=1}^{n} f(\alpha(\xi_i))(s_i - s_{i-1}) \underset{d(\pi)\to 0}{\rightarrow} \int_0^S f(\alpha(s))\,ds$

Тази функция е интегруема понеже $f \circ \alpha$ е непрекъсната върху [0, S].

__**Дефиниция 2.1**__ Нека е зададена гладка крива Γ чрез функцията $\alpha(s)$ и непекъсната върху точките от кривата функция $f: \Gamma \to R$. Криволинеен интеграл от първи род от функцията f върху Γ наричаме Римановия интеграл $\int_0^S f(\alpha(s))\,ds$ и бележим с $\int_\Gamma f\,ds$.

За да пресметнем по- лесно такива интеграли ще се възползваме от записа на криволинейния интеграл от първи род в параметъра t, а именно

$$\int_a^b f(\alpha(t))|\dot{\alpha}(t)|\,dt$$

следва от равенствата

$$t'(s)=\frac{1}{|\dot{\alpha}(t(s))|}\leftrightarrow\frac{dt}{ds}=\frac{1}{|\dot{\alpha}(t(s))|}\leftrightarrow ds=|\dot{\alpha}(t)|dt$$

Забележка : Ако положим f да е тъждествено единица, то получаваме, че криволинейния интеграл от първи род дава дължината на кривата.

<u>Основни свойства:</u>

1) Криволинейния интеграл от 1 род не зависи от параметризацията

2) Не зависи от посоката на обхождане

3) Може да се додефинира за частично гладки криви (гладка крива, освен в краен брой точки, където са непрекъснати). В този случай интеграла е сума от интегралите по гладките парчета.

<u>3. Криволинеен интеграл от втори род</u>

Мотивационна задача:

Нека разглеждаме материална точка, намираща се под действие на силово поле. Каква работа извършва това поле при дадено преместване на точката?

Забележка: Да припомним, че работа на постоянно силово поле , извършена за праволинейно преместване на материална точка от т. A до т. B е равна на

$$|AB|\left\langle \vec{F},\frac{\vec{AB}}{|AB|}\right\rangle = \langle \vec{F},\vec{AB}\rangle$$

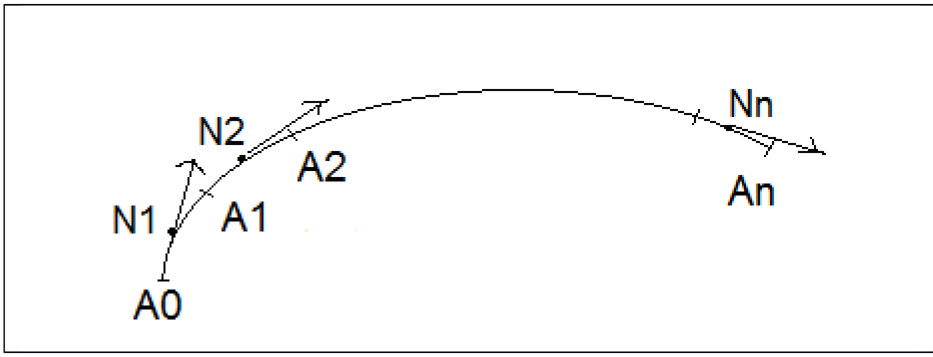
<u>Дефиниция 3.1</u> Векторно поле, дефинирано в област $\Omega\subset R^n$ наричаме функция F, която на всяка точка от Ω съпоставя вектор от R^n. Полето е **гладко**, ако функцията F е гладка.

Нека е зададена гладка крива Г $\subset$ Ω в естествен параметър. Ще изчислим работата, която ще извърши гладко векторно поле F за преместване на точка по кривата Г.

Да разделим кривата на отделни дъги посредством точките от кривата $A_0=A, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n=B$, отговарящи на стойности на естествения параметър $0=s_0<s_1<s_2<\dots<s_{n-1}<s_n=S$. Имаме $A_i=\alpha(s_i), i=0,1,\dots,n$. Освен това да изберем

представителни точки $\xi_i \epsilon [s_{i-1}, s_i], i=1,2,..,n$ и отговарящите им точки от кривата

$N_i=\alpha(\xi_i), i=1,\ldots,n$ (фиг. 2)



Фигура 2

Във всяка от представителните точки да прекараме единична допирателна $\tau(\overset{-¿}{N_i})$ към кривата. Ако разбиването е ситно тази допирателна ще е добро приближение на съответния и сегмент от кривата. Тогава за всеки сегмент можем да изчислим приближената работа на векторното поле чрез израза $¿\overset{-¿}{F}(N_i), \tau(\overset{-¿}{N_i}) > length(\Gamma_{A_{i-1}A_i})$

Да сумираме тези приближения

$$¿\overset{-¿}{F}(N_i), \tau(\overset{-¿}{N_i}) > ¿\, length(\Gamma_{A_{i-1}A_i}) = \sum_{i=1}^{n} ¿\overset{-¿}{F}(\alpha(\xi_i)), \tau(\overset{-¿}{\alpha(\xi_i)}) > (s_i - s_{i-1})$$

$$A \sum_{i=1}^{n} ¿$$

Последното е Риманова сума за функцията $f(s) = ¿\overset{-¿}{F}(\alpha(s)), \tau\ \overset{-¿}{(\alpha(s))} > ¿$. Тя е непрекъсната и следователно ако диаметъра на разбиването клони към 0, то

$$A = \int_0^S f(s)\, ds = \int_\Gamma ¿F, dr > ¿$$

<u>Дефиниция 3.2</u> Криволинеен интеграл от втори род от полето F по крива Γ наричаме

$$A = \int_0^S f(s)\, ds$$, където $f(s) = ¿\overset{-¿}{F}(\alpha(s)), \tau\ \overset{-¿}{(\alpha(s))} > ¿$.

Забележка: В параметър t интеграла има вида $A=\int_a^b ¿F(\alpha(t)),\dot{\alpha}(t)>dt$

Свойства:

1) Криволинейния интеграл от втори род не зависи от параметризацията

2) Ако сменим посоката на обикаляне, знакът на интеграла се сменя.

3) Може да се додефинира криволинеен интеграл от втори род за частично гладки криви по същия начин, както и при първи тип.

Дефиниция 3.3 (потенциал)

Нека F е векторно поле, дефинирано в област $\Omega\subset R^n$. Казваме, че F е **потенциално** ако съществува скаларна функция $u:\Omega\to R$, такава че

$$F=-grad(u)=\left(\frac{-\partial u}{\partial x_1},-\frac{\partial u}{\partial x_2},\ldots,-\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

Тази скаларна функция се нарича **потенциал**.

Теорема 3.1 Нека F е непрекъснато векторно поле, дефинирано в област $\Omega\subset R^n$.

Тогава следните са еквивалентни

3.1.1 $\int_{\Gamma_{AB}} ¿F,dr>¿$ не зависи от кривата , която свързва A и B (кривата лежи в Ω)

3.1.2 F е потенциално.

3.1.3 $\oint_{\Gamma} ¿F,dr\geq 0$ за всяка затворена крива Г в Ω

4. Формула на Грийн

Теорема 4.1 (Формула на Грийн)

Нека $\bar{F}$ е C^1(D) гладко векторно поле, D е отворено . Нека $\partial D=\Gamma$ е частично гладка, проста и затворена крива. Тогава ако $\bar{F}$ =(P(x,y),Q(x,y)) то е в сила

$$\int_{\Gamma} Pdx+Qdy=liint¿D¿.\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

Доказателство(в случая когато Г е криволинеен трапец по у и Q =0).

Имаме, че $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$ може да се представи по следния начин(фиг.3) :

$$\Gamma=\{(x, y_1(x)\,|\,x\epsilon[x_1, x_2]\}\,\bigcup\{(x_2, y)\vee y\epsilon[y_1(x_2), y_2(x_2)]\}$$

$$\bigcup\{(x, y_2(x)\,|\,x\epsilon[x_2, x_1]\}\,\bigcup\{(x_1, y)\,|\,y\epsilon[y_2(x_1), y_1(x_1)]\}$$

	Фигура 3

Имаме $\oint_{\Gamma} ¿F, dr \geq \oint_{\Gamma} P\,dx = \sum_{i=1}^{4} \int_{\Gamma_i} P\,dx$

$$\int_{\Gamma_1} Pdx = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x))\,dx$$

$$\int_{\Gamma_2} Pdx = \int_{x_1}^{x_2} P(x_2, y)\,dx_2 = 0 = \int_{\Gamma_4} Pdx$$

$$\int_{\Gamma_3} Pdx = \int_{x_2}^{x_1} P(x, y_2(x))\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x))\,dx$$

Следователно

$$\oint_{\Gamma} P\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\,dx \underset{\text{Лайбниц}-\text{Нютон}}{\overset{\text{Теорема на}}{=}} ¿$$

$$-\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} P(x, y)\,dy\,dx = \iint_{D} -\frac{\partial}{\partial y} P\,dxdy$$, което трябваше да докажем.

<u>Забележка 1:</u> Ако Q не е различно от нула можем да приложим същото разсъждение за

$\oint_{\Gamma} Qdy$ *ако D е криволинеен трапец и по x.*

<u>Забележка 2:</u> Ако D не е криволинеен трапец , понеже кривата е проста , затоворена и гладка можем да я разбием на <u>краен брой?</u> Криволинейни трапци. Върху всеки от тях ще приложим горното разсъждение и така ще получим сума от криволинейни интеграли върху тези трапци равна на двоен интеграл по цялото D, тъй като двойния интеграл е адитивен. Тази сума, обаче, при правилно обхождане на кривите ще се окаже равна на

$\oint_{\Gamma} ¿F, dr > ¿$ *, тъй като всяка вътрешна за D контурна крива на криволинеен трапец ще участва в точно два трапци, но те ще бъдат обхождани в различни посоки.*

Литература:

[1] Записки от лекциите МА, спец. ПМ, на Н. Рибарска

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.