Тема 7

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Степенни редове. Радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.

Анотация

Степенни редове. Радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.

1. Да се дефинира степенен ред на комплексна променлива и област на сходимост на такъв ред. Да се докаже, че ако един степенен е сходящ за някое комплексно число $z_0 \epsilon X$, то той е абсолютно сходящ за всяко z друго при $¿ z \vee ¿ \vee z_0 \vee ¿$

Да се докаже, че областта на сходимост е кръг с радиус $\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{¿ a_n \vee ¿}$ $¿\frac{1}{¿}$, където a_n са коефициентите на степенния ред.

2. Като се използва формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, да се развият в степенен ред при реални стойности на x функциите e^X, $\sin x$, $\cos x$. За целта да се намерят стойностите на всички производни на тези функции при $x = 0$.

1.

Ще разглеждаме степенните редове над полето на комплексните числа. Всички свойства изложени тук директно се пренасят за реалнозначни редове.

Дефиниция 1.1 (степенен ред)

Функционален ред от специалния вид $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, z \epsilon C$ наричаме **степенен ред.** По-общо, ако $\xi_0 \epsilon C$ е фиксирано комплексно число и $z = \xi - \xi_0$, то $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (\xi - \xi_0)^i, z \epsilon C$ също е **степенен ред**.

Дефиниция 1.2 (област на сходимост)

Множеството от точки G $\subset C$,за които $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ е *сходящ** наричаме ***област**** **на сходимост** за същия ред.

**да е сходящ* $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ *в точката* z_0 *означава редицата от парциалните му суми* $\Sigma_n = \sum_{i=0}^{n} a_i z_0^{\ i}$ *да е сходяща. Да е абсолютно сходящ означава редът* $\sum_{i=0}^{\infty} ¿ a_i z \vee ¿^i$ *да е сходящ.*

*** нарича се област, понеже, както в ще докажем това множество е наистина област в нетривиалните случаи , т.е. е отворено и свързано.*

Теорема 1.1

Нека редът $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ е сходящ за $z = z_0$. Тогава

$\forall z \epsilon C : \vee z \vee ¿ \vee z_0 \vee ¿$ той е абсолютно сходящ

Доказателство. Нека $|z|$ =r . От дадената сходимост имаме, че $|a_n z_0^n| \underset{n \to \infty}{\to} 0$.

Следователно $\exists \rho \epsilon \overset{+\text{¿}}{R^{\text{¿}}}$:

$\text{¿} a_n \vee \text{¿} z_0^n \vee \text{¿} \rho$. Нека z е такова, че $\text{¿} z \vee \text{¿} \vee z_0 \vee \text{¿}$. Имаме

$\sum_{i=0}^{\infty} \text{¿} a_i z^i \vee \text{¿} \sum_{i=0}^{\infty} \text{¿} a_i \vee \text{¿} \frac{z}{z_0} \text{¿}^i \vee z_0 \text{¿}^i < \rho \sum_{i=0}^{\infty} \text{¿} \frac{z}{z_0} \text{¿}^i$. Нека $\text{¿} \frac{z}{z_0} \vee \text{¿} q$. Тогава

$\sum_{i=0}^{\infty} \text{¿} a_i z^i \vee \text{¿} \rho \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{\rho}{1-q}$, понеже q<1. Следователно редът от абсолютните стойности е ограничен от горе и освен това редицата от парциалните му суми е растяща. Следователно той е сходящ.

Следствие:

Ако редът $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ не е абсолютно сходящ за всяко z, то областта му на сходимост е или кръг или { 0+0i }.

Доказателство:

Тъй като $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ не е абсолютно сходящ за всяко z, то съществува z_0 : $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z_0^i$ е разходящ. Ако допуснем, че има число с по- голям модул, за което редът е абсолютно сходящ, то по Теорема 1.1 ще излезе, че редът е абсолютно сходящ и за z_0 , което е противоречие. Следователно множеството от точки в комплексната равнина, за които редът е абсолютно сходящ е ограничено от кръга с център началото и радиус | z_0 |. Нека тогава вземем супремума R на ограниченото множество от реални числа – модулите на множеството от точки в комплексната равнина, за които редът е абсолютно сходящ.

$$R = \{ z : \vee z \vee \text{¿} |z_0| \vee \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i \, e\, абсолютно\, сходящ \}$$

Тогава в кръга |z|<R редът е абсолютно сходящ. В частност, R може да е 0 ако за никое ненулево комплексно число редът не е сходящ.

Теорема 1.2 (Коши – Адамар)

Тема 7

Числото R този следствието се намира по формулата $¿ a_n \vee ¿$ $\frac{1}{R}=L=\overset{¿}{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{¿}$ (най дясната точка

на сгъстяване на редицата $¿ a_n \vee ¿$ $\sqrt[n]{¿}$)

Доказателство:

1. Нека R=0, т.е. $L=\infty$. Тогава има подредица на a_n , за която от определен индекс нататък всички членове са по- гоелнми от константа, по- голяма от 1. Следователно сходимост е възможна само при z=0

2. Нека R= ∞ , т.е. $L=0$. Най дясната точка на сгъстяване на $\sqrt[n]{|a_n|}$ е 0, следователно е единствената. Ще докажем, че редът е сходящ за всяко комплексно число. Нека z е комплексно число с модул |z|. Съществува индекс N, че при n>N, $¿ a_n \vee ¿ < \frac{\rho}{|z|}$ $\sqrt[n]{¿}$.

Тогава повдигайки на n-та за всяко n получаваме , че $\sum_{i=1}^{\infty} ¿ a_n \vee ¿ z ¿^n < \sum_{i=1}^{\infty} \rho^n$. Следователно реда е абсолютно сходящ в т. z.

3. Нека R е крайно число. Ще докажем че при $¿ z \vee ¿ \frac{1}{L}=R$ редът е сходящ. Нека $¿ z \vee ¿ \frac{1}{L}$. От свойствата на реалните числа следва, че съществува $\epsilon>0, че \vee z \vee ¿ \frac{1}{L+\epsilon}<\frac{1}{L}$. От друга страна, от дефиницията на L следва, че $\sqrt[n]{a_n}<L+\frac{\epsilon}{2}$.

Следователно $\sqrt[n]{a_n}|z|<\frac{L+\frac{\epsilon}{2}}{L+\epsilon}=q<1.$ Следователно реда се мажурира от сходящ ред (геометрична прогресия).

Нека сега $|z|>\frac{1}{L}$. От свойствата на реалните числа следва, че съществува $\epsilon>0, че |z|>\frac{1}{L-\epsilon}>\frac{1}{L}$

Също така съществува подредица на $\sqrt[n]{a_n}$, за която от определено място нагоре $\sqrt[n]{a_n} > L - \epsilon$. Получаваме, че за членовете на тази подредица имаме $\sqrt[n]{a_n} \vee z \vee ¿ \frac{L-\epsilon}{L-\epsilon} = 1$.

Следователно редът от абсолютните стойности е разходящ.

2.

Припомняне:

Теорема (Тейлор)

Нека f е дефинирана в околност на т. а и в тази околност има непрекъснати производни до n+1-ва, където $n \epsilon N$. Тогава за f е в сила представянето

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + R_n(x), R_n(x) = o(x-a)^n$$

Във вид на Лагранж, остатъчния член е $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

Извод на формулата на Тейлор за $e^x, \sin(x), \cos(x)$

Твърдение 2.1 Развитието около 0 на e^x е

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + .. + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}, \theta \epsilon (0,1)$$

Наистина, производната на e^x е e^x и в нулата има стойност 1. Това е вярно и за всички производни на e^x

Твърдение 2.2 Развиетоето около 0 на sin(x) е

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + R_n(x)$$

Нека първо пресметнем производните на sin и тогава ще уточним R_n.

(sin(x))’=cos(x)

(sin(x))’’=(cos(x))’=-sin(x)

(sin(x))’’’=(-sin(x))’=-cos(x)

(sin(x))’’’’=(-cos(x))’=sin(x)

Следователно произвдната на sin се повтаря на всеки 4 стъпки. Да обобщим

$$(\sin(x))^{(n)} = \begin{cases} \cos(x), n=4k+1 \\ -\sin(x), n=4k+2 \\ -\cos(x), n=4k+3 \\ \sin(x), n=4k+4 \end{cases}$$

От тези пресмятания веднага се вижда защо коефициентите в реда са +/- 1 и 0 . Също остатъчния член ще е различен в зависимост този вида на n.

Твърдение 2.3 Развиетоето около 0 на cos(x) е

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + R_n(x)$$

(cos(x))’=-sin(x)
(cos(x))’’=(-sin(x))’=-cos(x)
(cos(x))’’’=(-cos(x))’=sin(x)
(cos(x))’’’’=cos(x)
Следователно произвдната на sin се повтаря на всеки 4 стъпки. Да обобщим

$$(\cos(x))^{(n)} = \begin{cases} -\sin(x), n=4k+1 \\ -\cos(x), n=4k+2 \\ \sin(x), n=4k+3 \\ \cos(x), n=4k+4 \end{cases}$$

От тези пресмятания веднага се вижда защо коефициентите в реда са +/- 1 и 0 . Също остатъчния член ще е различен в зависимост този вида на n.

Забележка: Частта с развитията на функции не е доизпипана.

Литература:
[1] Записки от лекциите по ДИС2 ,спец. ПМ, на Людмила Николова
[2] Увод в теория на аналитичните функции, Любомир Чолаков

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.