Тема 6

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон – Лайбниц

Анотация

Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон – Лайбниц

Да се дефинират последователно: разбиване на интервал, диаметър на разбиване, риманова сума и риманов интеграл. Да се покаже, че всяка интегруема по Риман функция е ограничена. Да се дефинират големи и малки суми на Дарбу. Да се установи, че при добавяне на нови точки в разбиването на интервала големите суми на Дарбу не нарастват, а малките не намаляват (желателно е да се направи чертеж).

Да се докаже, че дадена функция е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват голяма сума на Дарбу S и малка сума на Дарбу s такива, че $S - s < \varepsilon$. Като се използва тази теорема и теоремата на Кантор, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната, да се докаже, че всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман. Да се изброят (без доказателство) основните свойства на Римановия интеграл. Като се приложи свойството за интегриране на неравенства и теоремата, че всяка непрекъсната функция приема всички стойности между максимума и минимума си, да се докаже, че ако f е непрекъсната в $[a, b]$, то съществува $c \in [a, b]$, така че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

Като се използва този факт, да се докаже теоремата на Нютон – Лайбниц, т.е. че ако f е непрекъсната в $[a, b]$, то за всяко $x \in [a, b]$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x)$$

и да се покаже как тя се използва за изчисляване на определен интеграл.

Примерни задачи. Смяна на променливите и интегриране по части; интегриране на рационални функции; интеграли от вида

$$\int \frac{dx}{(x^2+y^2)^2}$$

субституции за интегриране на рационални функции този $\sin x$ и $\cos x$; субституции на Ойлер.

<u>Дефиниция 1.1</u> (Разбиване на интервал, диаметър на разбиване)

Нека е даден интервала [a, b]. **Разбиване** на интервала наричаме всяко множество от точки от интервала $\tau=¿$ $\{a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b\}$, където $x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{n-1} < x_n$.

Диаметър на разбиването наричаме $\max_{1\le i\le n-1} (x_{i+1}-x_i)$.

Измежду разбиванията на интервала [a,b] въвеждаме релация „по- ситно”, „ $\succ$. Казваме, че $\tau \succ \tau_1$ ако τ съдържа всички точки от τ_1 и поне още една.

<u>Дефиниция 1.2</u> (Суми на Риман)

Нека f е дефинирана върху интевала [a,b]. Нека вземем разбиване на интервала $\tau=¿$ $\{a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n=b\}$, където $x_0 < x_1 < x_2 < .. < x_{n-1} < x_n$. Да изберем във всеки интервал произволна точка $\xi_i \epsilon [x_{i-1}, x_i], i=1,2,..,n$. Ако f е ограничена в интервала, то

$$\Sigma_\tau(\xi_1, \xi_2, .., \xi_n)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

Наричаме сума на Риман за f и разбиването τ с точки { $\xi_1, \xi_2, .., \xi_n$ }.

<u>Дефиниция 1.3</u> (Интегруемост по Риман)

Казваме, че f е **интегруема по Риман** в интервала [a, b] ако съществува число I , такова, че за всяко $\epsilon>0$ съществува $\delta>0$ такова, че за всяко разбиване τ , такова, че $d(\tau)<\delta$ и за всеки избор на помощни точки $\xi_1, \xi_2, ..$ имаме

| $\Sigma_\tau(\xi_1, \xi_2, ..)$ – I | < ϵ . Това число I наричаме **интеграл** на f върху [a, b] и се бележи по следния начин: I = $\int_a^b f(x)dx$.

Твърдение.

Интегруемите по Риман функции са ограничени.

<u>Доказателство:</u>

Допускаме противното, нека интегруемата по Риман финкция f е неограничена. Нека $\epsilon>0$ и $\delta_\epsilon>0$ е числото от дефиниция 1.3. Нека τ е едно разбитаване с диаметър по- малък от δ_ϵ. Ще смятаме за определеност, че f расте неограничено в първия интервал $[x_0, x_1]$ и ще фиксираме помощните точки в другите интервали. Разглеждамеримановата сума

$$\Sigma_\tau\left(\xi_1\right)=f\left(\xi_1\right)\left(x_1-x_0\right)+\sum_{i=2}^{n} f\left(\xi_i^0\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)=f\left(\xi_1\right)\Delta_1+\Sigma^0,$$

в която можем да варираме ξ_1. От дефиницията имаме, че е изпълнено

$f\left(\xi_1\right)\Delta_1+\Sigma^0\leq I+\epsilon,$ следователно $\left|f\left(\xi_1\right)\Delta_1\right|\leq\left|I+\epsilon-\Sigma^0\right|\leq|I|+|\epsilon|+\left|\Sigma^0\right|,$ т.е.

$$¿ I\vee+¿\epsilon\vee+¿\Sigma^0\vee\frac{¿}{\Delta_1}$$
$$¿ f\left(\xi_1\right)\vee\leq¿$$

Но това е противоречие, защото f е неограничена в $[x_0, x_1]$.

Дефиниция 1.4 (малки и големи суми на Дарбу)

Нека е зададена функция, дефинирана в интервала [a, b] и е дадено разбиване τ на [a, b]. Тогава малка сума на Дарбу s_τ и голяма сума на Дарбу S_τ дефинираме по следния начин:

$$s_\tau=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i-x_{i-1}\right), m_i=\inf_{\left[x_{i-1}, x_i\right]} f(x)$$

$$S_\tau=\sum_{i=1}^{n} M_i\left(x_i-x_{i-1}\right), M_i=¿\left[x_{i-1}, x_i\right] f(x)$$

Твърдение. Нека е зададена функция, дефинирана в интервала [a, b] и са дадени разбивания τ, τ_1 : $\tau_1 \succ \tau$ на [a, b]. Тогава а) $S_{\tau_1}<S_\tau$ и b) $s_{\tau_1}>s_\tau$

Доказателство:

а) Нека първо да предположим, че τ_1 има само една точка повече и тя е $\overset{¿}{x}$, $x_k<\overset{¿}{x}<x_{k+1}$. Тогава сумата $S_{\tau_1}-S_\tau$ няма да се нулира само в интервала [x_k, x_{k+1}].

По- точно, имаме

$$S_{\tau_1}-S_\tau=\left(\overset{¿}{x}-x_k\right)¿\left[x_k,\overset{¿}{x}\right] f(x)+\left(x_{k+1}-\overset{¿}{x}\right)¿\left[\overset{¿}{x}, x_{k+1}\right] f(x)-\left(x_{k+1}-x_k\right)¿\left[x_k, x_{k+1}\right] f(x)$$

$$S_{\tau_1} - S_\tau < ¿ [x_k, x_{k+1}] f(x) [x_{k+1} - \overset{¿}{x} + x_{k+1} - \overset{¿}{x} - (x_{k+1} - x_k)] = 0$$

Но от дефиницията на релацията „ситност” за разбиванията е ясно, че всяко по- ситно разбиване от друго се получава с краен брой добавяния на една точка. Доказателството следва директно.

	Лицето на правоъгълника в червено е модула на разликата между големите суми на Дарбу. Размнаването се дължи, че в по- тесен интервал супремума на функцията в общия случай е различен от този в по-широк

б) аналогично.

Дефиниция 1.5 (Интегруемост -Дарбу)

Нека е зададена функция, дефинирана в интервала [a, b] и нека дефинираме множествата

$$M_1 = \{ S_\tau | \tau \text{ е разбиване на } [a, b] \}$$

$$M_2 = \{ s_\tau | \tau \text{ е разбиване на } [a, b] \}$$

Ясно е, че всяко число от M_1 е горна граница за M_2 и всяко число от M_2 е долна граница на M_1. От принципа за непрекъснатост следва, че

$$\exists ¿ M_2 = \underset{¿}{I} = \int_{\underset{a}{¿}}^{b} f(x)\,dx, \exists \inf_{M_1} ¿ = I = \int_a^{\overset{b}{¿}} f(x)\,dx$$. Ясно е, че $\underset{¿}{I} \quad \overset{¿}{\leq} I$.

Ако $\underset{¿}{I} \quad \overset{¿}{¿} I$, казваме, че f е **интегруема** и **определен интеграл** на f в интервала [a, b] бележим $\int_a^b f(x)\,dx$.

Теорема 1.1 (еквивалентност на дефинициите на Риман и Дарбу)

Дефинициите на Риман и Дарбу за интегруемост на функция в краен затворен интервал са еквивалентни.

(Без доказателство)

Забележка: От сега нататък така дефинирания интеграл ще наричаме интеграл на Риман и ще можем да проверяваме за интегруемост с всички еквивалентни дефиниции.

Теорема 1.1. (Еквивалентна дефиниция на интегруемост).

Необходимо и достатъчно условие за функцията f да е интегруема в интервала [a, b] е

$\forall \epsilon > 0 \; \exists \, \tau - \textit{разбиване на} [a, b] : S_\tau - s_\tau < \epsilon$

<u>Доказателство:</u>

<u>Необходимост</u>: Нека f е интегруема в смисъл на дефиниция 1.5. Нека $\epsilon > 0$.

Числото $I + \frac{\epsilon}{2}$ не е точна долна граница на големите суми на Дарбу. Тогава съществува разбиване на интервала τ_1 такова, че $I \leq S_{\tau_1} < I + \frac{\epsilon}{2}$.

Числото $I - \frac{\epsilon}{2}$ не е точна горна граница на малките суми на Дарбу. Тогава съществува разбиване на интервала τ_2 такова, че $I - \frac{\epsilon}{2} < s_{\tau_2} \leq I$.

Да разгледаме разбиването $\tau = \tau_1 \bigcup \tau_2$. В сила са неравенствата $I - \frac{\epsilon}{2} < s_{\tau_2} \leq s_\tau \leq S_\tau \leq S_{\tau_1} < I + \frac{\epsilon}{2}$

От тук за разбиването τ имаме $S_\tau - s_\tau < \epsilon$.

<u>Достатъчност</u>: Допускаме, че f не е интегруема в смисъл на дефиниция 1.5. Тогава $\overset{¿}{I} - \underset{¿}{I} = 2\epsilon > 0$.

Сега за така дефинираното ϵ да намерим разбиването τ , че $S_\tau - s_\tau < \epsilon$. Но от самите дефиниции на големите и малките суми на Дарбу имаме, че $S_\tau \geq \overset{¿}{I} > \underset{¿}{I} \geq s_\tau$, което е невъзможно тъй като би означавало 2 ϵ < ϵ .

Забележка: Класове от интегруеми функции са например

- *Непрекъснатите функции в краен затворен интервал*
- *Непрекъснатите функции в краен затворен интервал с изключение на краен брой точки на прекъсване от първи род*
- *Монотонни функции с прекъсвания от пътви род*

<u>Теорема 1.2</u> (интегруемост на непрекъснатите в краен, затворен интерал функции)

Нека f е дефинирана и непрекъсната в [a, b]. Тогава тя е интегруема върху [a, b].

Доказателсво:

Ясно е, че непрекъсната в краен затворен интервал функция е равномерно непрекъсната. Имаме

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0 : \vee x-y \vee ¿ \delta \rightarrow \vee f(x)-f(y) \vee ¿ \epsilon$$

За $\frac{\epsilon}{b-a}$ >0 намираме $\delta>0$. Да дефинираме разбиване τ на [a, b], в което точките са на равно разтояние, по- малко от δ - например $\frac{\delta}{2}$. Във всеки един от интервалите $[x_{i-1}, x_i]$ имаме, че f достига sup/inf и освен това, $\underset{[x_{i-1},x_i]}{¿} f\ (x)-\underset{[x_{i-1},x_i]}{inf} f\ (x)=M_i-m_i<\frac{\epsilon}{b-a}$. Да разпишем $S_\tau - s_\tau$:

$$S_\tau - s_\tau = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \frac{\epsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \epsilon \frac{b-a}{b-a} = \epsilon$$

От теорема 1.1 следва интегруемостта на функцията.

Свойства на Римановия интеграл:

- Адитивност.

Нека f е интегруема върху интервала [a, b] и върху интерала [b, c]. Тогава тя е интегруема върху [a, c] и

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

- Линейност.

Нека f, g са функции дефинирани върху [a, b]. Тогава за всеки две реални α, β

Функцията $\alpha f + \beta g$ е интегруема върху [a, b] и

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

- Положителност

Нека $f(x) \geq 0$ и е интегруема върху [a, b]. Тогава $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

- Интегриране на неравенства

Нека f, g са интегруеми върху [a, b] и освен това $f(x) \le g(x)$. Тогава

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

- Интегруемост на модула

Нека f е интегруема върху [a, b]. Тогава е интегруема и |f| и освен това

$$\text{¿} f(x) \vee \text{¿} dx$$
$$\text{¿} \int_a^b f(x)dx \vee \le \int_a^b \text{¿}$$

<u>Теорема 1.3</u> (теорема за междинната/ средната стойност)

Нека f е непрекъсната в крайния затворен интервал [a, b]. Тогава съществува $c \epsilon [a, b]$, че

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

<u>Доказателство:</u>

f достига sup/inf върху [a, b] ,т.е. $\inf_{[a,b]} f(x) = m \le f(x) \le M = \text{¿}[a,b] f(x)$. Но тогава

$$m = \frac{\int_a^b m dx}{b-a} \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \le \frac{\int_a^b M dx}{b-a} = M$$

Следователно $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ е число в интервала [m, M] и следователно то е функционална стойност на f. Нека тя се достига за x= c. Тогава

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c) \leftrightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad .$$

<u>Теорема 1.4</u> (Лайбниц – Нютон)

Нека *f* е непрекъсната в [*a, b*]. Тогава за всяко *x* ∈ [*a, b*]: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = f(x)$.

Доказателство.

Ясно е, че за всяко x от [*a*, *b*] $\int_a^x f(x)dx$ е добре дефинирано. Да образуваме

диференчното частно на $F(x)=\int_a^x f(x)dx$.

$$\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx}{\Delta x}\overset{\text{линейност}}{=}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x}$$

Да приложим теоремата 1.3 за числителя на последния израз.

$$\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x}=\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(\xi),\ \xi\epsilon[x,x+\Delta x]$$

Нека пуснем $\Delta x\to 0$. Получаваме $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\xi\epsilon[x,x+\Delta x]}(\xi)=f(x)$.

Следователно функцията F е диференцируема и $\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx=f(x)$.

<u>Следствие:</u>

Нека f е непрекъсната в [a, b]. Тогава $\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$, където Φ е някоя примитивна функция на f.

<u>Доказателство</u>:

От теорема 1.4 знаем, че $F(x)=\int_a^x f(x)dx$ -> F '(x) = f (x). Следователно F е примитивна на f . Нека Φ е друга примитивна на f . Знаем, че

$$(F(x)-\Phi(x))'=0\to F(x)-\Phi(x)=C$$

В последното равенство да положим x= a . Тогава понеже F ($a)=0$, то C=- $\Phi(a)$.

Да положим сега x=b. Имаме $F(b)-\Phi(b)=-\Phi(a)$. Но $F(b)=\int_a^b f(x)dx$.

Следователно

$$\int_a^b f(x)dx=\Phi(b)-\Phi(a)$$

Литература:

[1] Математически анализ, Дойчинов

[2] Диференциално и интегрално смятане. Функции на една променлива

[3] Записки от лекциите по ДИС1, ДИС2, спец. ПМ, на Людмила Николова

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.