Тема 5

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

Анотация

Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

Необходимо е да се докажат следните теореми, формулирани общо за по-кратко.

Нека f е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a,b). Да се докаже, че:

а) ако $f(a) = f(b)$, то съществува $c \in (a, b)$, така че $f'(c) = 0$ (Рол);

б) съществува $c \in (a, b)$, така че $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (Лагранж);

в) ако g е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a, b), $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, то съществува $c \in (a, b)$, така че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{(Коши).}$$

За доказателството на теоремата на Рол (а) да се използва (без доказателство!) теоремата на Вайерщрас, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал достига своя максимум и минимум.

Необходимо е още да се изведе формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж и Коши.

Примерни задачи. Нека $f(t) = a(1 - t)\cos at - \sin at$, където a е произволно фиксирано реално число:

а) да се пресметне $\int_0^x f(t)\,dt$

б) като се използва теоремата на Рол, да се докаже, че уравнението $f(t) = 0$ има
поне един корен в интервала (0,1).

Преди да започнем с теоремите на Рол, Лагранж, Коши и Тейлър да припомним теоремата на Вайерщрас и да дефинираме локален екстремум.

Теорема 0 (Вайерщрас)

Нека f е непрекъсната в [a,b] (краен, затворен интервал). Тогава тя е ограничена в [a, b] и достига най- голяма и най- малка стойност.

Дефиниция 0 (за локален екстремум)

Казваме, че f има локален максимум(минимум) в т. x_0, ако съществува околност D на x_0, че имаме $x \epsilon D \rightarrow f(x) \underset{(\geq)}{\leq} f(x_0)$

1. Теорема на Рол

Първо ще докажем една помощна теорема – на Ферма.

Теорема 1.1 (Ферма)

Нека f(x) е диференцируема в т. x_0 и има локален екстремум в нея. Тогава f'(x_0)=0.

Доказателство:

$$-¿=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h<0$$

Да образуваме диференчните частни $+¿=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, h>0 ; Derr¿$

$$Derr¿$$

Нека за определеност имаме минимум. Тогава числителят и знаменателят на $\overset{+¿}{Derr¿}$ са положителни , а числителят и знаменателят на $\overset{-¿}{Derr¿}$ са с противоположни знаци.

Понеже f е диференцируема , то при h-> $\overset{+¿}{Derr¿}$ и $\overset{-¿}{Derr¿}$ ще клонят към производната на f в т. x_0. От граничния преход и равенство между лявата и дясната граница

$$-\underset{h\to 0}{¿}\geq 0$$
$$+\underset{h\to 0}{¿}=lim Derr¿$$
$$0\geq \lim Derr¿$$

получаваме, че $f'(x_0)=0$.

Теорема 1.2 (Рол)

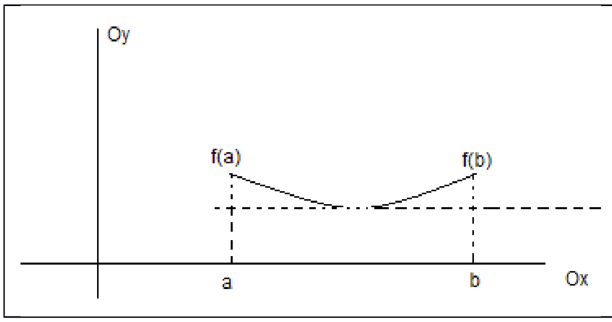
Нека f(x) е дефинирана и непрекъсната в [a,b] , диференцируема в (a,b) и нека f(a)=f(b). Тогава съществува т. $\xi \epsilon (a,b): f'(\xi)=0$

Доказателство:

От теоремата на Вайерщрас f достига НГС и НМС в интервала [a,b].
1 сл. НГС и НМС се достигат в крайщата на интервала.
От f(a)=f(b) следва, че f е константа в целия интервал и тогава във всяка точка от (a,b) производната и е нула.

2 сл. Поне едно от НГС и НМС се достига във вътрешна точка ξ на (a,b). Но тогава това ще е точка на локален максимум/минимум. По теоремата на Ферма f’(ξ¿$=0$.

Забележка 1.1: Теоремата на Рол има графична интерпретация: съществува точка от графиката на f , такава , че допирателната в нея е успоредна на оста Ox (фиг. 1)



Фиг 1

Забележка 1.2: Точката може да не е единствена – наистина, ако f не е константа и не достига нито НГС, нито НМС в крайщата, тогава ще имаме поне 2.

2. Теорема на Лагранж

Теорема 2.1 (Лагранж, за крайните нараствания)

Нека f(x) е дефинирана и непрекъсната в [a,b] , диференцируема в (a,b). Тогава съществува

$$\xi \epsilon (a,b): \qquad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leftrightarrow f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

.Тоест имаме, че крайното нарастване на функцията $f(b)-f(a)$ *е пропорционално на крайното нарастване на аргумента b-a. При това коефициента на пропорционалност е производна на функцията във вътрешна точка.*

Доказателство:

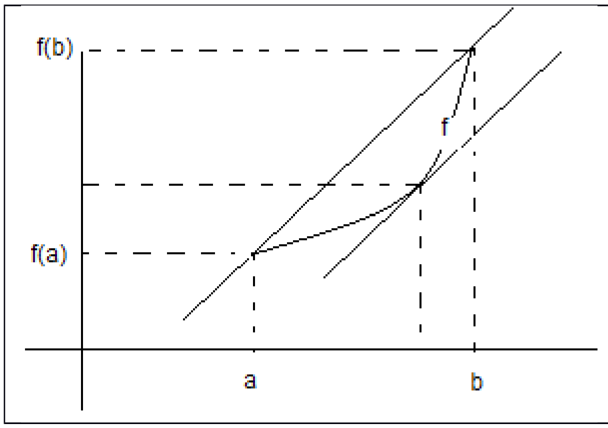
Да въведем функцията $\phi(x)=f(x)-kx$, k е реално. Веднага получаваме, че ϕ е дефинирана и непрекъсната в [a,b] , диференцируема в (a,b). Ще определим k така, че стойностите на ϕ в крайщата на интервала да са равни, за да приложим теоремата на Рол.

$$f(a)-ka=f(b)-kb \leftrightarrow k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a};\phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

Сега от Теорема 1.2 знаем, че съществува точка $\xi \epsilon (a,b),$ такава, че

$f'(\xi) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\right)'\Big|_{x=\xi} = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, което искахме да докажем.

Забележка 2.1: Теоремата на Лагранж също има геометрична интерпретация: съществува точка от графиката на f, че допирателната в нея е успоредна на правата, минаваща през (a,f(a)) и (b,f(b)).



Фиг 2

3. Теорема на Коши.

Теорема 3.1 (Коши)

Нека f и g са дефинирани и непрекъснати в [a,b] , диференцируеми в (a,b). Нека освен това g’(x) е различно от нула в интервала (a,b). Тогава съществува

$$\xi \epsilon (a,b): \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Доказателство:

Можем да смятаме, че условието е поставено коректно: Ако g(b)=g(a) , то по теоремата на Рол щяхме да получим нула на производната на g, което е противоречие с условието. Тоест $g(b) \neq g(a)$. Да отбележим, че ако g(x)=x , теоремата е еквивалентна на теоремата на Лагранж. Да образуваме $\phi(x) = f(x) - kg(x)$. Тя е *е* дефинирана и непрекъсната в [a,b] , диференцируема в (a,b). Да определим k така, че в крайщата на интервала да имаме една и съща стойност за ϕ . Получаваме k= $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. При това k да приложим

теоремата на Рол за ϕ . След директно разписване получаваме желания резултат.

4. Формула на Тейлор. Остатъчен член във вид на Лагранж и Коши

Теорема 4.1 (Тейлор)

Нека f е дефинирана в околност на т. a и в тази околност има непрекъснати производни до n+1-ва, където $n \epsilon N$. Тогава за f е в сила представянето

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i+R_n(x), R_n(x)=o(x-a)^n$$

Доказателство:

Да дефинираме(при фиксирано x)

$$\phi(t)=f(x)-\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(t)}{i!}(x-t)^i$$

$$\psi(t)=(x-t)^p$$

Имаме, че

$\phi(a)$ = $R_n(x)$ (така всъщност дефинираме $R_n(x)$)

$\phi(x)$ =0 (понеже f(x) се унищожава с $\frac{f^{(0)}(t)}{0!}(x-t)^0$, а останалите са нули.)

$\psi'(t)=-p(x-t)^{p-1}$ За производната на ϕ имаме

$$\phi'(t)=f'(t)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}\right)$$

$$\phi'(t)=f'(t)+\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)-\frac{f^{(1)}(t)}{2!}2(x-t)^0+....-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$\phi'(t)=\frac{-f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Да приложим теоремата на Лагранж за ϕ и ψ . Нека за определеност x>a .

Съществува $\xi \epsilon(a,x)$:

$$\frac{\phi(x)-\phi(a)}{\psi(x)-\psi(a)}=\frac{\phi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \leftrightarrow \frac{0-R_n(x)}{0-(x-a)^p}=\frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-p(x-\xi)^{p-1}}$$

Да изразим $R_n(x)$ от последното равенство.

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)^p}{n!p(x-\xi)^{p-1}}=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^{n-p+1}(x-a)^p}{n!p}$$

Да означим с $\theta=\frac{\xi-a}{x-a}, 0<\theta<1$. Така получаваме $x-\xi=(x-a)(1-\theta)$. Да заместим това в R_n .

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p}$$

За всяко p $R_n(x)$ =o($(x-a)^n$).

Понеже p беше произволно, то можем да му даваме различни стойности. Тогава получаваме остатъчни членове в различни форми.

- Остатъчен член във формата на Лагранж

Нека p=n+1. Заместваме и получаваме

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

- Остатъчен член във формата на Коши

Нека p=1. Заместваме и получаваме

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}$$

5. Допълнение към темата. Решаване не примерната задача

Нека $f(t) = a(1-t)\cos at - \sin at$, където a е произволно фиксирано реално число:

а) да се пресметне $\int_0^x f(t)\,dt$

б) като се използва теоремата на Рол, да се докаже, че уравнението $f(t) = 0$ има поне един корен в интервала (0,1).

Решение:

а) Да пресметнем първо неопределения интеграл.

$$\int f(t)\,dt=\int a(1-t)\cos(at)-\sin(at)\,dt=\int(1-t)\cos(at)\,d(at)+\int(-\sin(at))\,dt =$$

$$= \int(1-t)\,d(\sin(at))+\int -\sin(at)\,dt=(1-t)\sin(at)-\int\sin(at)(-1)\,dt+\int -\sin(at)\,dt$$

$$-¿\int f(t)\,dt=(1-t)\sin(at)\rightarrow\int_0^x f(t)\,dt=(1-x)\sin(ax)-1.\sin(0)=(1-x)\sin(ax)$$

b) Имаме, че за F(x) = $\int_0^x f(t)\,dt$ имаме F(0)=F(1)=0. Освен това F е непрекъсната в [0,1] и диференцируема – F’(x)=f(x). От теореамата на Рол следва, че съществува нула за F’(x), което трябваше да докажем.

Литература:

[1] Математически анализ, Дойчинов
[2] Диференциално и интегрално смятане. Функции на една променлива
[3] Записки от лекциите по ДИС1 ,спец. ПМ, на Людмила Николова

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.