Тема 4

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Граница, непрекъснатост, производна и примитивна на функция на една променлива. Геометрични интерпретации.

Анотация

Граница, непрекъснатост, производна и примитивна на функция на една променлива. Геометрични интерпретации.

1. Дефиниции на Хайне и Коши за *граница на функция* (в крайна точка и в безкрайността); доказателство на еквивалентността на двете дефиниции. Да се дефинира *непрекъснатост* на функция в дадена точка от дефиниционната област чрез дефинициите на Хайне и Коши.

2.Дефиниция на *производна* на функция в дадена точка като граница на *диференчните частни*. Да се обясни физичната интерпретация на производната (моментна скорост) и геометричната ѝ интерпретация (ъглов коефициент на *допирателната* към графиката на функцията в съответната точка, при което допирателната права се въвежда като гранично положение на *секущите* прави).

3.Формули (с доказателствата им) за производна на сума, произведение, частно и *суперпозиция* (*съставна функция*) на две диференцируеми функции. Намиране на производните на някои елементарни функции (*степенна функция, показателна функция, основни тригонометрични функции*). От формулата за производна на съставна функция се извежда (формално) формулата за производна на *обратна функция* и се прилага за намиране на производните на функциите *логаритъм* и *аркуссинус*).

4.Дефиниция на *примитивна* на дадена функция и доказателство, че ако дефиниционната област на една функция е интервал, то разликата между всеки две нейни примитивни е константа.

1.

Тема 4

Преди да дефинираме понятието граница на функция, да припомним някои понятия.

<u>Дефиниция 1.1</u> (редица от реални числа)

Казваме, че е зададена редица от R ако на всяко естествено $n \epsilon N$ е съпоставено реално $a_n \epsilon R$.

<u>Дефиниция 1.2</u> (граница на редица)

Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от реални числа е сходяща и клони към числото а ϵR ако за всяко $\epsilon > 0$ съществува такова $v \epsilon N$, че за всяко n > v да е изпълнено $¿ a_n - a \vee ¿ \epsilon$. Записано иначе,

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \, v \epsilon N : n > v \rightarrow \vee a_n - a \vee ¿ \epsilon$$

<u>Дефиниция 1.3</u> (точка на сгъстяване за множество М $\subset R$)

Казваме, че x_0 е точка на сгъстяване за множеството М ако във всяка околност на x_0 има поне един елемент от М, различен от x_0.

<u>Дефиниция 1.4</u> (дефиниция на *<u>Хайне</u>* за граница на функция)

Казваме, че реалнозначната функция f(x) клони към числото а при x клонящо към x_0 (тук x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционното множество D_f на f) , ако за всяка редица $x_n \underset{x_n \neq x_0,\, x_n \epsilon D_f}{\rightarrow} x_0$ имаме $f(x_n) \rightarrow a$, в смисъл на дефиниция 1.2.

<u>Дефиниция 1.5</u> (дефиниция на *<u>Коши</u>* за граница на функция)

Казваме, че реалнозначната функция f(x) клони към числото а при x клонящо към x_0 (тук x_0 е точка на сгъстяване за дефиниционното множество D_f на f) ако за всяко $\epsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$,

че $x \epsilon D_f \wedge ¿ x - x_0 \vee ¿ \delta \rightarrow \vee f(x) - a \vee ¿ \epsilon$

<u>Теорема 1.1.</u>

Дефинициите на Хайне и Коши за граница на функция са еквивалентни.

Доказателство:

(=>) Нека f(x)-> a спрямо дефиницията на Хайне. Допускаме, че не е вярно, че f(x)-> a спрямо дефиницята на Коши. Тогава съществува

$$\epsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \, \exists \, x_\delta \epsilon (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \wedge x_\delta \neq x_0 \wedge ¿ f(x_\delta) - a \vee \geq \epsilon_0$$

Нека последователно взимаме $\delta=\frac{1}{n}$ и да означим $x_\delta = x_{\frac{1}{n}}$ с x_n. Получихме редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, такава, че $x_n \neq x_0$ & $|x_n - x_0| <$ δ & $¿ f(x_n)-a\vee \geq \epsilon_0$. Но тази редица е сходяща към x_0 и следователно е нарушена дефиницията на Хайне.

(<=)Нека f(x)-> a спрямо дефиницията на Коши. Нека $x_n \to_{x_n \neq x_0,\, x_n \epsilon D_f} x_0$. Искаме да докажем, че редицата $f(x_n) \to a$. Нека $\epsilon > 0$. От дефиницията на Коши избираме $\delta > 0$, че $x \epsilon D_f \wedge ¿ x - x_0 \vee ¿ \delta$ и $¿ f(x) - a \vee ¿ \epsilon$. Но от това, че $x_n \to_{x_n \neq x_0,\, x_n \epsilon D_f} x_0$ имаме, че има такова $v \epsilon N$, че за всяко n > v да е изпълнено $¿ x_n - x_0 \vee ¿ \delta$. Така доказахме, че от $x_n \to_{x_n \neq x_0,\, x_n \epsilon D_f} x_0$ следва $f(x_n) \to a$.

<u>Дефиниция 1.6</u> (непрекъснатост на функция в точка по Хайне)
Казваме, че f(x) е непрекъсната в точката си на сгъстяване x_0 ако за всяка редица $x_n \to_{x_n \neq x_0,\, x_n \epsilon D_f} x_0$ редицата $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и границата и е $f(x_0)$.

<u>Дефиниция 1.7</u> (непрекъснатост на функция в точка по Хайне)
Казваме, че f(x) е непрекъсната в точката си на сгъстяване x_0 ако за всяко $\epsilon > 0$ може да се намери $\delta > 0$, че $x \epsilon D_f \wedge ¿ x - x_0 \vee ¿ \delta \to \vee f(x) - f(x_0) \vee ¿ \epsilon$

Да отбележим, че може да имаме само „лява” или само „дясна” непрекъснатост. Това е по-слаб случай, когато разглеждаме клонящи редици от x към x_0 съответно само от ляво или само от дясно
($x<x_0$ / $x > x_0$). От тази гледна точка можем да дефинираме непрекъснатост в точка по нов начин: една функция е непрекъсната в точка x_0 ако е непрекъсната в точката от ляво и от дясно.

<u>**2.**</u>

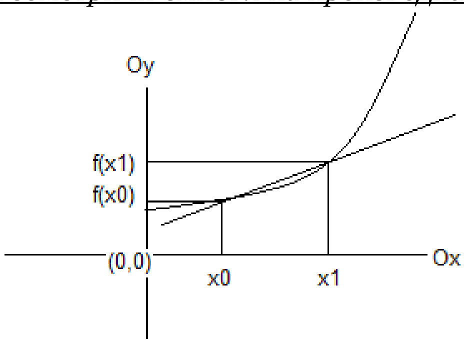
<u>Дефиниция 2.1</u> (производна)
Казваме, че функцията f(x) има *производна* в точка x_0 – точка на сгъстяване за $D_{f,}$, ако *диференчното частно* $\frac{f(x)-f(x_n)}{x-x_n}$ има граница при x->x_0. Когато тази граница

съществува, ще я наричаме *производна* на f в x_0. Бележим по няколко начина :

$$f'(x_0), \frac{d}{dx} f¿_{x=x_0}$$

Физичен смисъл на производната: Нека разгледаме някоя физична величина f, зависеща от времето(най- често се взима изминато разтояние от материална точка – път). *Средна скорост на изменение* на f в интервала $[t_0, t_1]$ се нарича $\frac{f(t_1)-f(t_0)}{t_1-t_0}$. *Моментна скорост* на величината f в момента t_0 наричаме стойността на средната скорост за t_1 произволно близко до t_0. Оказва се, че именно това е производната на f в точката x_0. В случая на f=S(t) – изминат път, S'(t)=V(t) е скоростта на движение. V'(t)=A(t) пък е ускорението.

Геометричн смисъл на производната:



Нека разгледаме функция, дефинирана в [a, b] и нека $a \le x_0 < x_1 \le b$. Да разгледаме точките
$(x_0,f(x_0))$ и $(x_1,f(x_1))$ от графиката на функцията и през тях прекараме права. Тя има уравнение

$$y=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

Частното $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ е равно на тангенса на ъгъла, който правата сключва с Ox^+.

Оставяйки x_1 да клони към x_0 получаваме, че този коефициент клони към производната на функцията в точка x_0, а геометрично правата, която построихме „клони" към допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0,f(x_0))$.

3.

Теорема 3.1.

Тема 4

Нека f, g са диференцируеми в отворен интервал, съдържащ т. x_0. Тогава

3.1.1 $(f \pm g)'(x_0)=f'(x_0) \pm g'(x_0)$

3.1.2 $(f.g)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0)$

3.1.3 Ако $g(x) \neq 0$ близо до x_0. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

3.1.4 $(f(g))'(x_0)=f'(g(x_0)).g'(x_0)$

Доказателство:

3.1.1:

$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0}(f\pm g)(x)-(f\pm g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\frac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

3.1.2:

$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0}(f.g)(x)-(f.g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}[(f.g)(x)-f(x_0).g(x)]+[f(x_0)g(x)-(f.g)(x_0)]}{x-x_0}=¿$$

$$¿\lim_{x\to x_0} g(x)\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

3.1.3:

$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f}{g}(x)-\frac{f}{g}(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0}=¿$$

$$¿\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\frac{[f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)]+[f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x)]}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)}=¿$$

$$¿\frac{g(x_0)\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\frac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)g(x_0)}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

3.1.4:

$$\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\frac{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=¿$$

$$¿\lim_{¿} f(y)-f(y_0)\frac{¿}{y-y_0}\frac{\lim_{x\to x_0} g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(g(x_0))g'(x_0)$$

$y \to y_0$

(Тук използваме непрекъснатостта на g(x) , която е следствие от диференцируемостта и.

Забележка: Навсякъде в доказателствата използвахме свойствата на границите, а именно, че граница от сума/разлика/произведение/частно е сума/разлика/произведение/частно от граници.

Теорема 3.2. В сила са следните равенства

3.2.1 $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, x >0

3.2.2 $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, x>0

3.2.3 $(e^x)'=e^x$

3.2.4 $(\sin x)'=\cos x$

3.2.5 $(\cos x)'=-\sin x$

Доказателство:

3.2.1.

$$\ln'(x_0)=\frac{\lim_{x-¿x_0}\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim_{x-¿x_0}\ln\left(1+\frac{x}{x_0}-1\right)}{x-x_0}=\frac{\lim_{x-¿x_0}\ln\left(1+\frac{x-x_0}{x_0}\right)}{\frac{x-x_0}{x_0}x_0}=\frac{1}{x_0}$$

3.2.2.

$$(\log_a(x_0))'=\frac{\lim_{x-¿x_0}\log_a(x)-\log_a(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim_{x-¿x_0}\log_a\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x-x_0}=\frac{\lim_{x-¿x_0}\frac{\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\ln a}}{x-x_0}=\frac{1}{\ln a}\frac{\lim_{x-¿x_0}\ln(x)-\ln(x_0)}{x-x_0}\overset{3.2.1}{=}\frac{1}{x_0\ln a}$$

3.2.3 Използваме правилото за диференциране на сложна функция.

$$x=\ln e^x \vee \frac{d}{dx} \leftrightarrow 1=\frac{1}{e^x}.(e^x)' \leftrightarrow (e^x)'=e^x$$

3.2.4

$$\sin'(x_0)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\sin(x)-\sin(x_0)}{x-x_0}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}2\sin\frac{(x-x_0)}{2}\cos\frac{(x+x_0)}{2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\cos\frac{(x+x_0)}{2}\frac{\lim\limits_{x\to x_0}\sin\frac{(x-x_0)}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=\cos(x_0)$$

3.2.5 $\cos'(x_0)=\sin'(\frac{\pi}{2}-x_0)\overset{\text{сложна функция}}{=}\cos(\frac{\pi}{2}-x_0)(-1)=-\sin(x_0)$

Теорема 3.3. Нека y=f(x) е непрекъснато- диференцируема в околност на x_0. Нека обратната и в тази околност е $x=f^{-1}(y)$ и $y_0=f(x_0)$. Тогава за производната на обратната функция на y имаме

$$(f^{-1}(y_0))'=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказателство:

От обратимостта имаме, че $x=f(f^{-1}(x))$. Диференцираме това равенство в т. x_0, прилагайки правилото за диференциране на обратна функция.

Следствие(Пример):

$$x\epsilon(-1,1)\to(\arcsin(x))'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Наистина, $\sin(\arcsin(x))=x$. По теорема 3.3

$$(\arcsin(x))'=\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

4.

Дефиниция 4.1 Нека $f:\Delta\to R$. Казваме, че функцията $F:\Delta\to R$ е примитивна на f , ако F'(x)=f(x).

Теорема 4.1. Нека $f:\Delta\to R$. Нека F $:\Delta\to R$ е примитивна на f, тогава

4.1.1 Функцията F+C също е примитивна за f (C е произволна реална константа).

4.1.2 Обратното, ако Φ е някаква примитивна за f , то съществува константа C, че Φ =F+C.

Доказателство:

4.1.1 Нека C е константа. Понеже производна от константа е 0, то (F+C)'=F'+0=f.

4.1.2 Да разгледаме $\Psi=\Phi-F\to\Psi'=\Phi'-F'=f-f=0$. Но тогава Ψ =C .

Дефиниция 4.2 Изразът F(x)+C, където F е примитивна на f в Δ, ще наричаме неопределен интеграл на f в Δ и ще бележим с нотацията

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Забележка: В темата е доказана първо формулата за производна на логаритъм, а после експонента, не както в анотацията.

Литература:

[1] Математически анализ, Дойчинов
[2] Диференциално и интегрално смятане. Функции на една променлива
[3] Записки от лекциите по ДИС1 ,спец. ПМ, на Людмила Николова

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.