Тема 3

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Анотация

Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

1. Дефиниции и постановка
2. Всички характеристични корени на симетричен оператор са реални числа;
   Всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си;
   Съществува ортонормиран базис на пространството, в който матрицата на симетричен оператор е диагонална.

1. Дефиниции и постановка

Дефиниция 1.1 (крайномерно евклидово пространство)
Крайномерно евклидово пространство Е наричаме линейно пространство над полето на реалните числа с краен базис в което е въведено скаларно произведение.

Припомняния:

- Скаларното произведение е такава функция ¿,*¿ ¿ от $E x E \to R$, че са изпълнени аксиомите

1. $(a,a) \geq 0$ $и$ $(a,a)=0 \Leftrightarrow a=0$

2. $(a,b)=(b,a)$

3. $(\lambda a,b)=\lambda(a,b)$

4. $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$

За всеки $a,b,c \epsilon E и \lambda \epsilon R$

- Линейните оператори в Е са линейните функции от Е към Е. За всеки базис линейните оператори имат матрица, по чийто сълбове стоят координатите на резултатите вектори от действието на оператора върху базиса.

Дефиниция 1.2 (симетричн оператор в крайномерно евклидово пространство)
Нека А е линеен оператор в евклидово пространство. Казваме, че А е *симетричен,* ако $\forall x,y \epsilon E (A(x),y)=(x,A(y))$

Дефиниция 1.3 (симетрична матрица)
Казваме, че матрицата А е симетрична, ако А=А’, А’ е транспонираната и.

<u>**Теорема 1.1.**</u>
Нека Е е крайномерно евклидово пространство. Нека А е линеен оператор в Е. Тогава А е симетричн тогава и само тогава, когато матрицата му А в ортонормиран базис е симетрична.
Доказателство:
(=>) Нека **A** е симетричен оператор и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е ортонормиран базис. Нека А=

$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ е матрицата му в $\{e_i\}_{i=1,..n}$,тоест имаме $\mathbf{A}(e_j)=a_{1j}e_1+\ldots+a_{nj}e_n$ за j от 1 до n.

Имаме, че $(A(e_i), e_j) = (e_i, A(e_j))$. Разписвайки това равенство и отчитайки ортонормираността

$$\left(a_{1i}e_1+\ldots+a_{ji}e_j+\ldots a_{¿}e_n,e_j\right)=\left(e_i,a_{1j}e_1+\ldots+a_{ij}e_i+\ldots a_{nj}e_n\right)$$

$$a_{1i}\left(e_1,e_j\right)+\ldots+a_{ji}\left(e_j,e_i\right)+\ldots a_{¿}\left(e_n,e_j\right)=a_{1j}\left(e_1,e_i\right)+\ldots+a_{ij}\left(e_i,e_j\right)+\ldots a_{nj}\left(e_n,e_i\right)$$

$$0+..+a_{ji}1+..+0=0+\ldots+a_{ij}1+..+0$$

$$a_{ji}=a_{ij}$$

(<=) Нека спрямо ортонормирания базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ оператора **A** има симетрична матрица A.

Нека x, y са два вектора от E и нека представянето им в базиса е

$$x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$$

$$y=y_1e_1+...+y_ne_n$$

Нека **A**(x)= $\xi_1e_1+...+\xi_ne_n$, а **A**(y)= $\eta_1e_1+...+\eta_ne_n$. Имаме следните векторно-матрични равенства:

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ ..\\ \xi_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1\\ ..\\ x_n\end{pmatrix} и \begin{pmatrix}\eta_1\\ ..\\ \eta_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}y_1\\ ..\\ y_n\end{pmatrix}.$$

Да разпишем (**A**(x),y) и (x, **A**(y)).

(**A**(x),y)=($A\begin{pmatrix}x_1\\ ..\\ x_n\end{pmatrix}¿'$. $\begin{pmatrix}y_1\\ ..\\ y_n\end{pmatrix}$ = $(x_1,..,x_n)A'$ $\begin{pmatrix}y_1\\ ..\\ y_n\end{pmatrix}$

(x, **A**(y))= $(x_1,..,x_n)A$ $\begin{pmatrix}y_1\\ ..\\ y_n\end{pmatrix}$

От A=A' получаваме (**A**(x), y)=(x,**A**(y))

2.

<u>**Теорема 2.1**</u>

Корените на характеристичния полином на симетрична матрица са реални числа.

Доказателство:

Нека A = (a_{ij}) е симетрична, т.е. $a_{ij}=a_{ji}$. В доказателството ще използваме теоремата на Д'Аламбер, според която корените на всеки полином с реални коефициенти са комплексни числа. Характеристичния полином на A е f(λ) = det(A - λE). Понеже $a_{ij}\in\mathbf{R}\Rightarrow$

коефициентите на f(λ) са реални числа. От теоремата на Д’Аламбер ⇒ корените на f(λ) са комплексни числа.
Ще докажем, че тези комплексни корени всъщност са реални числа.
И така нека β е корен на f(λ) ⇒ $\beta \in \mathbf{C}$
Т.е. det(A - βE) = 0
Разглеждаме линейната квадратна хомогенна система :

$$(A-\beta I)\begin{pmatrix} x_1 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}$$

От det(A - βE) = f(β) = 0 ⇒ тази система има ненулево решение $(\alpha_1, .. , \alpha_n)$ и някое $\alpha_i \neq 0$.
От $\beta \in \mathbf{C}$ ⇒ коефициентите на тази система също ще са комплексни числа. Следователно нейните решения също ще са комплексни числа

⇒ $(\alpha_1, .. , \alpha_n) \in \mathbf{C}^n$ и някое $\alpha_i \neq 0$.. Имаме $A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ .. \\ \alpha_n \end{pmatrix}=\beta\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ .. \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Да умножим скаларно от ляво

уравнението с вектора $\begin{pmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ .. \\ \bar{\alpha}_n \end{pmatrix}$ от комплексно спрегнати . Получаваме

$$\gamma=(\bar{\alpha}_1,..,\bar{\alpha}_n)A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ .. \\ \alpha_n \end{pmatrix}=\beta(\alpha_1^2+..+\alpha_n^2)$$ и $$\beta=\frac{\gamma}{(\alpha_1^2+..+\alpha_n^2)}$$. Получаваме още, че

$$\gamma=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\bar{\alpha}_i\alpha_j=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\bar{\alpha}_i\alpha_j=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\bar{\alpha}_j\alpha_i=\bar{\gamma}$$. Но това означава, че β е частно на две

реални числа. Следователно β е реално.

<u>**Теорема 2.2:**</u>
Нека L е крайномерно ненулево евклидово пространство. Всеки симетричен оператор в L има собствени вектори, които образуват ортонормиран базис. В този базис матрицата на оператора е диагонална и числата по главния диагонал са собствените стойности на тази собствени вектори.
<u>Доказателство:</u>
Нека *A* е симетричен оператор в L. Ще извършим ииндукция по n = dim*L*.

База: n = 1 ⇒ *L* = { λu | u ≠ 0 }

Всеки ненулево вектори този *L* е собствени вектори на разглеждания оператор.
Ако изберем този вектор u да има дължина 1, тогава този вектор ще образува ортонормиран базис и ще бъще собствен.

Нека n ≥ 2. В ортонормиран базис матрицата на симетричния линеен оператор е симетрична, следователно(от Теорема 2.1) корените на характеристичния полином ще бъдат реални. Тъй като тези корени принадлежат на основното поле, те ще бъдат собствени стойности. Поради това съществува $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ – собствена стойност на разглеждания линеен оператор. Нека e_1 е съответния собствен вектор(има поне един такъв) , т.е. $A(e_1) = \lambda_1 e_1$. Тъй като ако един вектор е собствен, то и след като го нормираме отново получаваме собствен вектор със същата собствена стойност, можем да предположим, че $|e_1| = 1$. Допълваме вектора e_1 до базис $e_1, f_2, \ldots, f_n$. Този базис го ортогонализираме по метода на Грам - Шмид и получаваме $e_1, f_2', \ldots, f_n'$ ортогонален базис на L. Нормираме векторите от този базис и получаваме $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ ортонормиран базис ($e_1 = e_1'$). Нека $L_1 = l(e_2', \ldots, e_n') = \{ \lambda_2 e_2' + \ldots + \lambda_n e_n | \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - реални$\}$. Понеже $e_2', \ldots, e_n'$ са линейно независими $\Rightarrow \dim L_1 = n-1$. Ще докажем следната характеристика (*) на L_1 : $x \in L_1 \Leftrightarrow (x, e_1) = 0$. Тук L_1 е ортогоналното допълнение на подпространството на L от всички колинеарни на e_1 вектори.

Първо е ясно, че ако $x \in L_1$, то по x като линейна комбинация на ортогонални на e_1 вектори ще е перпендикулярен на e_1.

Обратното, нека x е такъв, че $\Leftrightarrow (x, e_1) = 0$. Разлагаме x по $\{ e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$. Получаваме $x=\xi_1 e_1' + \ldots + \xi_n e_n'$. Следователно $(x, e_1) = \xi_1(e_1', e_1) + \ldots + \xi_n(e_n', e_1) = \xi_1(e_1', e_1) = 0$. От тук веднага получаваме, че $\xi_1 = 0$. Но тогава $x \in L_1$.

Разглеждаме $x \in L_1$. Тогава $(x, A(e_1)) = (x, \lambda_1 e_1) = \lambda_1 (x, e_1) \overset{(*)}{=} 0$. Понеже $(x, A(e_1)) = (A(x), e_1)$ имаме $(A(x), e_1) = 0$. съгласно (*) $A(x) \in L_1$. И така ако $x \in L_1$, тогава $A(x) \in L_1$. Това ни дава право да разглеждаме A като линеен оператор в подпространството L_1. Тъй като $\dim L_1 = n-1$, за ограничението на A върху L_1 можем да приложим индуктивната хипотеза, и да направим извода, че съществува ортонормиран базис $e_2, \ldots, e_n$ в L_1 от собствени вектори на A , т.е.

$A(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 2, \ldots, n$. $(e_i, e_i) = \delta_{ij}$ За да докажем, че $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е търсения базис, остава да изясним, че e_1 е ортогонален на останалите. Това е очевидно понеже $e_i \in L_1$ *за* $i=2,..,n$.

__Теорема 2.3__

За всяка симетрична матрица А, елементите на която са реални числа, съществува ортогонална матрица Т такава, че $T^{-1}AT$ да е диагонална, като по диагонала са корените на характеристичния полином на А.

Доказателство:

Нека А е квадратна матрица матрица от n-ти ред и A = A’.

Нека L е евклидово пространство и $\dim L = n$. Разглеждаме ортонормирания базис $e_1, \ldots, e_n$ на L.

Дефинираме линейния оператор A като линеен оператор, матрицата на който в базиса $e_1, \ldots, e_n$ е дадената матрица А. От **Теорема. 2.2** следва, че съществува ортонормиран базис $e_1^*, \ldots, e_n^*$ от собствени вектори, т.е. $A(e_i^*) = \lambda_i e_i^*$.

В този базис матрицата на линейния оператор е $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Знаем , че A* = $T^{-1}AT$, където T е матрицата на прехода. Съгласно **Теорема 2.2** матрицата T е ортогонална, т.е. $T^{-1} = T'$. поради това имаме A= T'AT.

Следващата задача е от държавния изпит за спец. ПМ, март, 2007

Задача 3

Спрямо ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на евклидовото пространство е зададен линеен оператор $\Psi : U \to U$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намери ортонормиран базис на пространството U, в който матрицата D на оператора $\Psi : U \to U$ е диагонална, както и тази матрица D.

б) Да се докаже, че за всеки ненулев елемент $x \in U$ е изпълнено

$$\left| \frac{(\Psi(x), x)}{(x, x)} \right| \leq 9,$$

където (z, y) е скаларното произведение на елементите z и y.

в) Да се намери матрицата на оператора Ψ^{2006} и да се докаже, че числото

$$\frac{(\Psi(x), x)}{(x, x)}$$

не зависи от ненулевия елемент $x \in U$.

Решение:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}$. Характеристичния полином на A е $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & -1-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & -7-\lambda \end{vmatrix}$.

След разписване , характеристичното уравнение на A е $729 + 81\lambda - 9\lambda^2 - \lambda^3 = 0$. Неговите корени са $\lambda_1 = 9, \lambda_{2,3} = -9$. Да намерим собствени вектори, съответстващи на тези собствени стойности.

- $\lambda_1=9$. Заместваме тази стойност в хомогенната система (A- λE) $\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -4 & 2 \\ -4 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тази система има едномерно пространство от решения поради еднократността на собствената стойност 9. Ако намерим едно такова, сме намерили всички . Вижда се, че векторът e_1= $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ е решение.

- $\lambda_1=-9$. Заместваме тази стойност в хомогенната система (A- λE) $\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тази система е еквивалентна на уравнението 2x1-2x2+x3=0 и има двумерно пространство от решения. Да намерим негов базис.
За x1=0 x2=1 получаваме x3=-2 ; За x1=1 x2=0 получаваме x3=2. Така получаваме линейнонезависимите собствени вектори e_2= $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, e_3= $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Ясно е, че $(e_1,e_2)=(e_1,e_3)=0$ поради това че са вектори на различни собствени числа. За да намерим ортонормиран базис трябва първо да ортогонализираме векторите e_2,e_3 по метода на Грам-Шмид.

Нека $e_3^*=e_3+\lambda e_2$. Условието $(e_3^*, e_2)=0$ записано за λ е $\lambda=\dfrac{-\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right)}=\dfrac{4}{5}$.

Тоест .$e_3^*=\begin{pmatrix}1\\4/5\\-2/5\end{pmatrix}$.

Получихме ортогонален базис, остава да ортонормираме векторите e_1, e_2, e_3^* (делим ги на дължината им).Така получаваме ортонормирания базис f_1 , f_2, f_3 , в който A е диагонална.

$f_1=\begin{pmatrix}2/9\\-2/9\\1/9\end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\end{pmatrix}$, $f_3=\begin{pmatrix}5/(3\sqrt{5})\\4/(3\sqrt{5})\\-2/(3\sqrt{5})\end{pmatrix}$ Ортогоналната матрица на прехода е D=

$\begin{pmatrix}2/9 & 0 & 5/(3\sqrt{5})\\-2/9 & 1/\sqrt{5} & 4/(3\sqrt{5})\\1/9 & 2/\sqrt{5} & -2/(3\sqrt{5})\end{pmatrix}$. Имаме , че A=D. $\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & -9 & 0\\0 & 0 & -9\end{pmatrix}$ D^T. (понеже $D^T=D^{-1}$)

б) Нека x е разложен спрямо базиса, намерен в а). Тогава

$$¿\frac{(\Psi(x),x)}{(x,x)}\vee¿ = ¿\frac{\left(\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & -9 & 0\\0 & 0 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix}\right)}\vee¿ = ¿\frac{\left(\begin{pmatrix}9x1\\-9x2\\-9x3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix}\right)}{\left(\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x1\\x2\\x3\end{pmatrix}\right)}\vee¿ =$$

$$¿\frac{9x1^2-9x2^2-9x3^2}{x1^2+x2^2+x3^2}\vee¿$$

Сега $¿\dfrac{(\Psi(x),x)}{(x,x)}\vee¿$ <= 9 е еквивалентно на $¿\dfrac{9x1^2-9x2^2-9x3^2}{9x1^2+9x2^2+9x3^2}\vee\leq 1$, което е очевидно.

в)Матрицата на $\Psi^{2006} = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}^{2006} = D.\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}^{2006} . \; D^T \; =$

9^{2006}
0
0
¿

= D 0 $(-9)^{2006}$ 0 . D^T = $9^{2006} D.E.D^T = 9^{2006} D.D^{-1} = 9^{2006} E$;
0 0 9
−¿ ¿ (¿2006¿¿)
¿

Навярно тук се има в предвид ,че числото е $\frac{(\Psi^{2006}(x), x)}{(x, x)}$. Нека x е разложен в базиса от

а)

$$\frac{(\Psi^{2006}(x), x)}{(x, x)} = \frac{(9^{2006} E\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix})}{(\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix})} = \frac{9^{2006}(x1^2 + x2^2 + x3^2)}{x1^2 + x2^2 + x3^2} = 9^{2006} .$$

Литература:

[1]Записки по алгебра : Линейна алгебра.
[2] http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/va1notes.shtml
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Algebra

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.