Тема 2

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа.
Следствия.

Анотация

Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа.
Следствия.

Полето на комплексните числа е алгебрически затворено; всеки полином с комплексни коефициенти се разлага в произведение на линейни множители; всеки полином с реални коефициенти се разлага в произведение на линейни и квадратни множители; формули на Виет.

Задача. Прилагане на формулите на Виет за полином с числови коефициенти.

1. Предварителни сведения за понятията в заглавието и анотацията.

<u>Дефиниция 1.1</u> (за пръстен)

Нека K е непразно множество, в което са дефинирани следните две операции:

- първата: на всеки два елемента a, b ∈ K съпоставя елемент a + b ∈ K, който се нарича ***сума*** на a и b
- втората: на всеки два елемента a, b ∈ K съпоставя елемент a.b ∈ K, който се нарича ***произведение*** на a и b.

Казваме, че относно тези операций K е **<u>пръстен</u>**, ако са изпълнени следните условия:

(1) (a + b) + c = a + (b + c) - асоциативност на събирането
(2) a + b = b + a - комутативност на събирането
(3) съществува нулев елемент 0 Є K такъв, че a + 0 = a, за всяко a ∈ K
(4) За всяко a ∈ K съществува противоположен елемент –a ∈ K такъв, че a + (-a) = 0
(5) (a.b).c = a.(b.c) - асоциативност на умножението
(6) (a + b).c = a.c + b.c - дясна дистрибутивност на умножението
(7) c.(b + c) = c.a + c.b - лява дистрибутивност на умножението

Да споменем, че (1-4), показват, че K е комутативна група относно събирането*[1]

Казваме, че K е пръстен ***с единица***, ако съществува e ∈ K, e ≠ 0 такъв, че a.e = e.a = a за всяко a∈K.

Казваме, че K е ***комутативен*** ако за всяко a, b∈K a.b=b.a

<u>Дефиниция 1.2</u> (за поле)

Комутативният пръстен P с единица ще наричаме ***поле***, ако единицата не съвпада с нулевия елемент на P и всеки ненулев елемент на P е обратим[2].

<u>Дефиниция 1.3</u> (за полином)

Нека K е комутативен пръстен. Полином на променлива x над пръстена K, наричаме израз от вида: $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, където $a_0, a_1, \ldots, a_n \in K$ и се наричат коефициенти на f(x).

Полагаме $a_0x^0 = a_0$ и $a_1x^1 = a_1x$. Така, че всеки полином ще има вида $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Ако всички коефициенти на f(x) са равни нула, f(x) се нарича нулев **<u>полином</u>**. Ако f(x) е ненулев, тогава най-голямото естествено число n, за което коефициента пред x^n е различен от нула се нарича степен на f(x) и се бележи ст(f(x)) или deg(f(x)). Множеството на всички полиноми над пръстена K се бележи с K[x]. То също е пръстен и с единица тогава и само тогава, когато самият K е пръстен с единица. В този случей единицата на K[x] е полиномът от нулева степен с единствен коефициент единицата в K.

<u>Дефиниция 1.4</u> (за алгебрически затворено поле)

Казваме, че *полето* F е ***алгебрично затворено***, ако всеки неконстантен полином от F[x] се разлага на линейни множители над F[3].

1 Виж дефиницията на група например от [1,2]

2 т.е. P е поле, ако мултипликативната му група P* съвпада с подмножеството P\{0} от ненулевите елементи на P

3 За целите на темата, интуитивната представа за разлагане на полином е достатъчна. За прецизация [3].

2. Основна теорема на алгебрата. Затвореност на полето на комплексните числа като следствие.

Теорема 2.1 Основна теорема на алгебрата(Теорема на Даламбер):

Всеки неконстантен полином $f(x) \in C[x]$ има комплексен корен.

Ще са ни необходими следните две леми.

Лема 1:

Нека $f(x) \in R[x]$ и ст. f(x) е нечетно число. Тогава f(x) има реален корен.

Доказателство :

Нека $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$

ст. f(x) = n, n – нечетно число

$h(x) = \frac{1}{a_n}\left(\frac{a_0}{a_n} + \ldots + x^n\right)$. f(x) има реален корен тогава и само тогава, когато h(x) има реален корен. Следователно достатъчно е да докажем, че h(x) има реален корен. Тъй-като ст.(h(x)) е нечетна имаме

$$\lim_{x \to -\infty}(h(x)) = -\infty \text{ и } \lim_{x \to +\infty}(h(x)) = +\infty.$$

Следователно съществува $x_1 \in R$ такова, че $h(x_1) < 0$ и съществува $x_2 \in R$ такова, че $h(x_2) < 0$. тъй като h(x) е непрекъсната, съществува $x_0 \in [x_1,x_2]$ такова, че $h(x_0) = 0$, т.е. x_0 е корен на h(x).

Лема 2:

Нека $a+bx+cx^2 \in C[x]$, $a \neq 0$. Тогава $a+bx+cx^2$ има комплексен корен.

Доказателство:

Корените на $a+bx+cx^2=0$ са $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, които в общия случей са комплексни.

Преди доказателството на теоремата на Даламбер ще докажем следното по-слабо твърдение:

Теорема 2.2:

Нека f(x) е неконстантен полином с реални коефициенти. Тогава f(x) има комплексен корен.

Д-во:

Нека $f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$. Нека $n = 2^s.k$, k – нечетно число.

Доказателството ще извършим по индукция относно s.

1.База s = 0.

В тази ситуация n е нечетно число и от **Лема 1** следва, че f(x) има даже реален корен.

2.Нека s ≥ 1. Разглеждаме разширение E на полето на комплексните числа C над, което f(x) се разлага на линейни множители.

$f(x)=(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$ където $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ и са корени на f(x) в E.

Разглеждаме

$$H(x;x_1,x_2,\dots,x_n)=\prod_{1\le i<j\le n}[x-(x_i+x_j+cx_i x_j)]$$

където c е произволно реално число. След като развием дясната част и направим съответните опростявания ще получим полином на променливата x, коефициентите на който са от пръстена на полиномите R[$x_1,x_2,\dots,x_n$]. Разглеждаме транспозицията $x_i \leftrightarrow x_j$ при тази транспозиция имаме

$x_i+x_j+cx_ix_j \leftrightarrow x_j+x_i+cx_jx_i$

$x_i+x_k+cx_ix_k \leftrightarrow x_j+x_k+cx_jx_k$, $k \neq j$

Множителите, в които не участват x_i и x_j не се променят. Следователно произволна при транспозиция на променливите множителите на H(x; $x_1,x_2,\dots,x_n$) се разместват, но тяхното произведение не се променя. Следователно при всяко разместване на променливите коефициентите на H(x; $x_1,x_2,\dots,x_n$) не се променят. Това означава, че коефициентите пред степените на x са симетрични полиноми от пръстена R[$x_1,x_2,\dots,x_n$]. Съгласно *основното следствите на теоремата за симетрични полиноми[2 – тема за Симетрични полиноми]* коефициентите на h(x) = H(x; $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$) ще бъдат реални числа, т.е.

(*) $$H(x;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\prod_{1\le i<j\le n}\left[x-(\alpha_i+\alpha_j+c\alpha_i\alpha_j)\right]\epsilon R[x]$$

Имаме ст.h(x) = $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2^s k(2^s k-1)}{2}=2^{s-1}k(2^s k-1)=2^{s-1}k'$, където k′ е нечетно число.

И така h(x) ∈ R[x] и ст.h(x) = 2^{s-1} k′, където k′ е нечетно число. Съгласно индуктивната хипотеза h(x) има комплексен корен β ∈ C. Заместваме в (*) и получаваме

$$h(\beta;\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=\prod_{1\le i<j\le n}\left[\beta-(\alpha_i+\alpha_j+c\alpha_i\alpha_j)\right]=0$$

Тъй-като в E няма делители на нулата, имаме $\beta=\alpha_i+\alpha_j+c\alpha_i\alpha_j$ за някои индекси i и j. И така за всяко реално число c ∈ R съществуват индекси i и j такива, че $\alpha_i+\alpha_j+c\alpha_i\alpha_j$ ∈ C. Понеже двойките индекси (i, j), където 1 ≤ i ≤ n и 1 ≤ j ≤ n са краен брой, а реалните числа са безброй много съществуват реални числа $c_i \neq c_j$, за които при едни и същи индекси i и j имаме:

$$\alpha_i+\alpha_j+c_1\alpha_i\alpha_j=z_1\epsilon C$$

$$\alpha_i+\alpha_j+c_2\alpha_i\alpha_j=z_2\epsilon C$$

като извадим тези равенства получаваме

$(c_1 - c_2)\alpha_i \alpha_j = z_1 - z_2$ и $\alpha_i \alpha_j = \dfrac{z_1 - z_2}{c_1 - c_2}$

Поради това $\alpha_i + \alpha_j$ = z_1 - $c_1 \alpha_i \alpha_j$ ϵC. Получихме, че сумата и прозведението на a_i и a_j са комплексни числа. Разглеждаме

¿∗¿
¿
¿

От Лема 2 имаме, че t(x) има комплексен корен γ . Заместваме в (**) и получаваме

$(\gamma - \alpha_i)(\gamma - \alpha_j) = 0$

Тъй като в F няма делители на нулата имаме, че $\gamma = \alpha_i$ или $\gamma = \alpha_i$. Следователно α_i или α_i е комплексно число. Теорема 2.2 е доказана.

Д-во на Теоремата на Даламбер(Т. 2.1):

Нека $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ ϵ C[x], a_n $\neq$ 0.

Ако коефициентите са реални Теоремата на Даламбер следва от Теорема 1.

Ще предполагаме, че не всичките коефициенти $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ са реални. Разглеждаме полинома $f_1(x) = \overset{¿}{a}_0 + \overset{¿}{a}_1 x + \overset{¿}{a}_2 x^2 + \ldots + \overset{¿}{a}_n x^n$, чийто коефициенти са комплексно спрегнатите на коефициентите на f. Да разгледаме полинома h(x) от степен 2n, който е равен на произведението на f и f_1. $h(x) = f(x) f_1(x)$ = $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{2n} x^{2n}$.

Тъй-като $b_k = \sum\limits_{i+j=k} \overset{¿}{a}_i \overset{¿}{a}_j, b_k = \sum\limits_{i+j=k} \overset{¿}{a}_i a_j$. Следователно $b_k = \overset{¿}{b}_k$, за всяко к = 0, . . , 2n, т.е. h(x) ϵ R[x]. От Теорема 2.1 имаме, че h(x) има комплексен корен α ϵ C. Следователно

$h(\alpha) = f(\alpha) f_1(\alpha)$

Тъй като в полето C няма делители на нулата, или $f(\alpha) = 0$, или $f_1(\alpha) = 0$.

Ако $f(\alpha) = 0$, тогава f(x) има комплексен корен α и теоремата е доказана.

Нека $f_1(\alpha) = 0$ т.е. $\overset{¿}{a}_0 + \alpha \overset{¿}{a}_1 + \alpha^2 \overset{¿}{a}_2 + \ldots + \alpha^n \overset{¿}{a}_n = 0$. Тогава $f_1(\overset{¿}{\alpha}) = 0$, т.е.

¿
¿
¿
¿

$\overset{¿}{a}_0 \overset{¿}{\alpha} \overset{¿}{a}_1 \alpha^2 \overset{¿}{a}_2 \ldots + \overset{¿}{\alpha}^n \overset{¿}{a}_n a_0 + \overset{¿}{\alpha} a_1 + \overset{¿}{\alpha}^2 a_2 + \ldots + \overset{¿}{\alpha}^n a_n = 0$ т.е. $f(\overset{¿}{\alpha}) = 0$ или комплексното число $\overset{¿}{\alpha}$ е корен на f(x).

Теорема 2.3 Полето C на комплексните числа е алгебрически затворено.

Нека f(x) ϵ C[x] е неконстантен полином.

Индукция по степента на полинома - n.

- Ако n=1 f(x) е линеен полином и следователно теоремата е доказана.
- Нека за n > 1 е вярно твърдението.
- Нека ст.(f)=n+1. Според теоремата на Даламбер f има поне един корен α , т.е.

  $f(x)=(x-\alpha)g(x)$,

Където ст.(g) = n. Прилагаме индукционната стъпка за g и теоремата е доказана.

<u>Теорема 2.4</u> Над полето на реалните числа неразложими са полиномите от първа степен и тези полиноми над R от втора степен, които нямат реални корени. Други неразложими полиноми в R[x] няма.

<u>Доказателство:</u>

1) Нека f(x) има реални коефициенти и ст.f(x) = 2.
Ако f(x) е разложим над R, тогава корените на f(x) са реални.
Ако f(x) има реален корен α, тогава f(x) се разлага във вида:
$f(x)=(x-\alpha)g(x)$, където ст.g(x) = 1. Следователно f(x) е разложим над R.

Поради това един полином с реални коефициенти от втора степен е разложим над R *тогава и само тогава*, когато има реални корени. Следователно един полином от втора степен е неразложим над полето на реалните числа тогава и само тогава, когато няма реални корени.

$$((A\leftrightarrow B)\leftrightarrow(\overset{¿}{A}\leftrightarrow\overset{¿}{B}))$$

2) Нека ст.f(x) ≥ 3 и f(x) ϵ R [x]. Трябва да докажем, че f(x) е разложим над R.

2.1) Ако f(x) има реален корен α, тогава f(x) се разлага във вида:
$f(x)=(x-\alpha)g(x)$ и $(x-\alpha),g(x)\epsilon R[x]$

където ст.g(x) ≥ 2. Следователно f(x) е разложим над R.

2.2) Нека f(x) няма реални корени. Тогава от теоремата на Даламбер следва, че f(x) има комплексен корен, който не е реален, т.е. $\alpha\neq\overset{¿}{\alpha}$. Следователно в каноничното разлагане на f(x) ще участва $(x-\alpha)(x-\overset{¿}{\alpha})$, т.е.

$$f(x)=(x-\alpha)\left(x-\overset{¿}{\alpha}\right)g(x)=\left(x^2-\left(\alpha+\overset{¿}{\alpha}\right)+\alpha\overset{¿}{\alpha}\right)g(x)$$

Тъй като $x^2-\left(\alpha+\overset{¿}{\alpha}\right)+\alpha\overset{¿}{\alpha}$ ϵ R [x] следва, че g(x) ϵ R [x]. От ст.f(x) ≥ 3, следва ст.g(x) ≥ 1. Следователно f(x) е разложим над R.

3. Формули на Виет

Нека *F* е поле и $f\epsilon F$. Нека *E* е разширение на полето *F*, над което f се разлага на линейни множители. Имаме, че

$$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n=a_n(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ldots(x-\beta_n)$$

$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n\epsilon E$ и са корените на f над E. Ако разкрием скобите отдясно получаваме следните връзки между корените на f $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ и коефициентите му $a_0,a_1,\ldots,a_n$, които се наричат **формули на Виет**

$$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=\frac{-a_{n-1}}{a_n}$$

$$\prod_{1\le i<j\le n}\beta_i\beta_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

...

$$\prod_{1\le i_1<i_2<..<i_k\le n}\beta_{i_1}\beta_{i_2}..\beta_{i_k}=\frac{(-1)^k a_{n-k}}{a_n}$$

...

$$\beta_1\beta_2\ldots\beta_n=\frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

Литература:

[1]Записки по алгебра : Групи, пръстени, полиноми.
[2] http://www.fmi.uni-sofia.bg/algebra/va1notes.shtml
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Algebra

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.