Тема 1

Държавен изпит

специалност

Приложна математика

Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.

Анотация

Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.

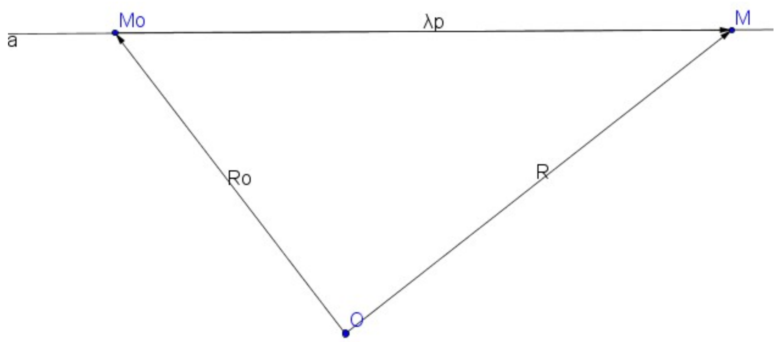
1 Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина.
2 Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави.
3 Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Ъгъл между прави.
4 Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.
5 Уравнение на окръжност. Канонични уравнения на елипса, хипербола и парабола. Фокални свойства на елипса, хипербола и парабола

❖ 1

Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина.

Навсякъде в 1 ще предполагаме, че координатната система е афинна. Разбира се, резултатите са верни и за декартова.

Нека разгледаме афинна координатна система и някоя права а, лежаща в нея. В случая няма значение дали координатната система е равнинна или пространствена. За черетежа(фиг.1) ще мислим, че е в пространството. Ще изведем **векторното уравнение на правата** чрез колинеарен вектор и произволна точка от нея. Нека M_0 е произволна точка от правата и нека $\vec{p}$ е вектор, колинеарен с правата. Нека О е центъра на координатната система. След като M_0 е фиксирана, фиксиран е и векторът $\vec{R}_0$. Ще



фигура

изразим вектора $\vec{R}=\vec{OM}$ чрез $\vec{p}$ и $\vec{R}_0$. Точка М лежи върху правата и вектора p е колинеарен с нея, следователно съществува реално число λ, такова че $\vec{M_0M}=\lambda\vec{p}$.

От равенството $\vec{OM}_0+\vec{M_0M}=\vec{OM}$ след заместване получаваме

$$(1.1)\quad \vec{R}=\vec{R}_0+\lambda\vec{p}\ ,$$

което наричаме ***векторно уравнение на правата*** а. Когато М обикаля правата, λ обикаля реалната права R и обратното. Стойността λ =0 отговаря на $M\equiv M_0$. Знакът на λ определя положението на М спрямо M_0 (от коя страна се намира).

От (1.1) ще изведем **параметричното уравнение на права** в равнината и пространството. За целта да представим вектора $\vec{p}$ и точката M_0 покомпонентно.

$\vec{p}=(p_x, p_y, p_z)$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$

Равенството на вектори (1.1) е еквивалентно на система равенства на компонентните от ляво и дясно. Нека $\vec{r}=\vec{r}(x,y,z)$. Директно от (1.1) следват равенствата

$$x=x_0+\lambda p_x$$

$$(1.2)\quad y=y_0+\lambda p_y$$

$$z=z_0+\lambda p_z$$

(1.2) наричаме **параметрично уравнение на правата** а в пространството. Съответно в равнината то ще изглежда по същия начин, но без третата компонента.

$$x=x_0+\lambda p_x$$

$$(1.3)\quad y=y_0+\lambda p_y$$

След изключване на λ от (1.2) получаваме

$$(1.4)\ \frac{x-x_0}{p_x}=\frac{y-y_0}{p_y}=\frac{z-z_0}{p_z}\quad (=\lambda)$$

Забележка 1. Да отбележим, че ако p е ненулев по предположение и поне една негова компонента е ненулева. Възможно е, обаче някоя компоненета да е нулева. Нека например $p_x=0$ *, а останалите са ненулеви. Тогава първия член в (1.4) отпада като не забравяме, че* $x=x_0.$ *С тази уговорка, по- нататък няма да се интересуваме дали някоя компонента не е нулева и ще записваме формално (1.4) за всяко параметрично уравнение на права.*

Нека имаме две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ и $M_1\neq M_2$. Ще построим права през тях. Нека изберем M_0 = M_1 и образуваме вектора

$\vec{p}=M_2\vec{M_1}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ - той очевидно е колинеарен с правата. Ясно е също, че от различността на двете точки следва ненулевост на поне едната компоненета на *p.* Според (1.4), правата през M_1 и M_2 има уравнение

$$(1.5)\ \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

❖ 2

Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави.

Ще покажем алтернативен начин за записване на (1.1) и (1.4). Този нов запис се нарича **общо уравнение на права в равнината**.

Теорема 1. *Координатите (x , y) на произволна точка M от права a в равнината удовлетворява уравнение от вида*

(2.1) $Ax+By+C=0$ *, където*

(*) $¿A\vee+¿B\vee\neq 0$

Обратното, за всяко A и B, за които е изпълнено условието (*), (2.1) определя някаква права в равнината.

Доказателство:

¿>¿ ¿ Нека правата a е определена от точката $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевия вектор $p(a, b)$

. Тогава от (1.4) имаме $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}\Leftrightarrow xb-ya-x_0 b+a y_0=0$. Полагаме A:=b, B:■a, C:= $-x_0 b+a y_0$. Условието (*) е изпълнено, тъй като p е ненулев.

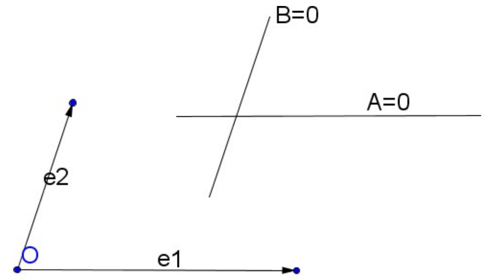
(¿) Нека имаме (2.1) и (*). Ще посочим точка и вектор, които определят права, произхождаща от това уравнение. Нека (x_0, y_0) е някакво решение на (2.1) (такова има заради предположението (*)). Имаме (!) $A x_0+B y_0+C=0$. Да разгледаме вектора $p(-B, A)$. Съпоставяме правата през (x_0, y_0) , спордна на p :

$$\frac{x-x_0}{-B}=\frac{y-y_0}{A}$$ (при уговорката от Заб.1)

Но това е параметричното уравнение на права през т. (x_0, y_0) и с колинеарен вектор $p(-B, A)$.

■

Да забележим (фиг.2) , че в 2.1):



- A=0 означава правата да е успоредна на на оста $\overrightarrow{Ox}$;
- B=0 означава правата да е успоредна на оста $\overrightarrow{Oy}$
- C=0 означава правата да минава през центъра на координатната система.

фигура

Нека отново разгледаме уравнението на права през две точки за равнина:

$$(2.2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

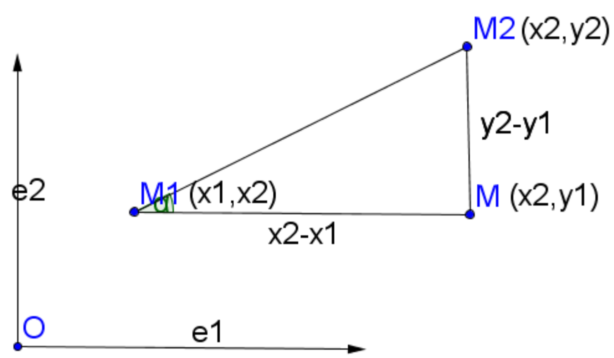
Нека предположим допълнително за определеност, че $y_2-y_1 \neq 0$. Можем да запишем (2.2) във вида

$$(2.3)\, y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

Коефициентът k = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ се нарича ъглов коефициент. Да положим b = $\frac{-x_2y_1+x_1y_2}{x_2-x_1}$. Тогава

$$(2.3) \Leftrightarrow (2.4)\, y=kx+b \,,$$

което наричаме **декартово уравнение на права.** Това представяне е вярно за афинна координатна система, но смисълът му идва от значението на коефициента k в декартова координата система. Нека се намираме в ортонормирана координатна система и сме построили правата по кои- да- е нейни различни точки. Нека M е такава точка, че $MM_1 \vee ¿ \overrightarrow{Ox}$ и $MM_2 \vee ¿ \overrightarrow{Oy}$.



фигура

Тогава ако означим $\alpha = ¿ MM_1M_2$, то α е равен на ъгъла, който правата сключва с $\rightarrow + ¿$ $Ox^{¿}$. При това, както се вижда от фиг.3 ,

$$tg(\alpha)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k$$

Имаме следните съответствия:

- k=0 отговаря на успоредна на оста Ox права, което пък отговаря на $\alpha=0\ rad.$
- Когато правата започне да се „изправя” ($\alpha\to\frac{\pi}{2}$) , tg($\alpha¿$ -> ∞ и уравнението

 (4) е безсмислено

В общия случай, декартовото уравнение на дадена права, записана чрез общото си уравнение се получава като разделим на ненулеата константа пред y (или x) и прехвърлим всичко от другата страна.

Взаимно положение на 2 прави

Нека са дадени правите

$g_1 : A_1 x+B_1 y+C_1=0$ и $g_2 : A_2 x+B_2 y+C_2=0$

Ще разгледаме взаимното положение на g_1 и g_2 – както знаем, те или се пресичат, или са успоредни, или съвпадат. Следващата теорема дава аналитичен критерий за това.

<u>Теорема 2.</u> *Правите* g_1 и g_2 *:*

а) се пресичат точно когато $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}¿$

б) са успоредни(но не съвпадат) точно когато $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$

в) съвпадат точно когато $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

* Тези отношения се разбират в по- широк смисъл. Ако например A_2 =0, $A_1\neq 0$, то $\frac{A_1}{A_2}$ ще възприемаме като „безкрайност”. В този случай, другата дроб не може да бъде „безкрайност”и съответно имаме пресичане на две прави, едната от които е успоредна на оста Ox , а другата не е. Ако пък $A_2=A_1=0,$ или успоредни или съвпадат в зависимост от това дали $\frac{-C_1}{B_1}=\frac{-C_2}{B_2}$. С тази уговорка ще смятаме, че $A_2\neq 0, B_2\neq 0$.

Доказателство:

От доказателството на *Теорема 1* имаме, че $\vec{p}_1(-B_1, A_1) \vee ¿ g_1$ и $\vec{p}_2(-B_2, A_2) \vee ¿ g_2$.

Правите са успоредни или съвпадат тези два вектора са колинеарни. Условието за това е
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$$

От това разсъждение веднага следва а) понеже ако $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то двете прави нито са успоредни, нито съвпадат, а са успоредни(обобщено успоредни) и обратното.

в) Нека $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, тоест $C_1=\rho C_2$ и тогава едното уравнение се получава чрез умножение на другото по ненулева константа, тоест правите съвпадат. Обратното, нека правите съвпадат. Тогава $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ (защото имат успоредни вектори)и имаме представяне

$$g_1 : \rho\left(A_2 x + B_2 y\right) + C_1 = 0$$

$$g_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

След умножаване на второто уравнение по ρ и изваждането им, получаваме $C_1=\rho C_2$. Доказахме в).

б) Нека $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$. От $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ следва, че правите не се пресичат. Допускаме, че съвпадат и достигаме до противоречие поради в). Следователно правите са успоредни.

Нека правите са успоредни, но не съвпадат. От успоредността имаме $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

■

Допускаме, че $\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ и достигаме до противоречие заради в). Следователно

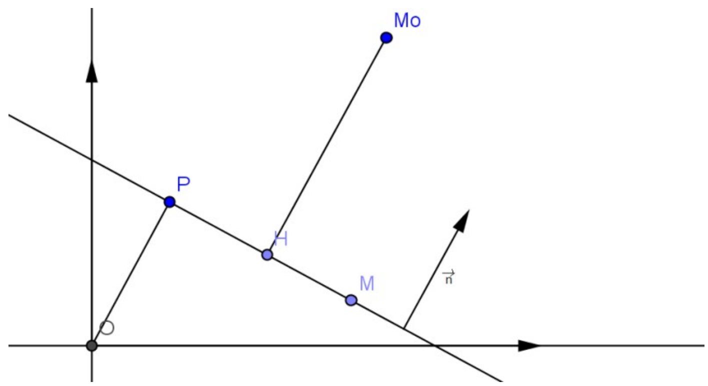
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Доказахме б).

3.

Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Ъгъл между прави.

В 3 навсякъде координатната система ще е ортонормирана. Т.нар. **нормално уравнение** на права в равнината се въвежда с цел лесно пресмятане на разтоянието произволна точка до нея.



фигура

Да разгледаме права g(фиг. 4) , която не минава през началото O. Нека точка M_0 е произволна и нележаща на g. Да означим с P петата на перпендикуляра от O към g, а с H (x_1, y_1) означим петата на перпендикуляра от

Да разгледаме единичният вектор $\vec{n}=\frac{\vec{OP}}{p}$, където p=|OP|. Той е перпендикулярен на правата. Нека означим ъгъла $\alpha \epsilon ¿$ между OP и $\vec{Ox}$. Тогава $\vec{n}=¿$

$\vec{n}(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$. Координатите на P са P $(p\cos(\alpha), p\sin(\alpha))$. Сега можем да кажем, че една точка M(x, y) лежи на правата g $\vec{OP}.\vec{PM}=0$. Но

$\vec{PM}=\vec{PM}(x-p\cos(\alpha), y-p\sin(\alpha))$ и последното равенство е еквивалентно на

$\cos(\alpha)(x-p\cos(\alpha))+\sin(\alpha)(y-p\sin(\alpha))=0$

$$(3.1)\ x\cos(\alpha)+y\sin(\alpha)-p=0$$

(3.1) се нарича **нормално уравнение** на правата g. Да разгледаме вектора $\vec{HM_0}(x_0-x_1, y_0-y_1)$. Искаме да намерим неговата дължина. Тъй като той е колинеарен с $\vec{n}$, съществува такова $\delta \epsilon R$, че $(¿)\ \vec{HM_0}=\delta\vec{n}$; δ наричаме ориентирано разтояние на M_0 до правата: то може да е положително или отрицателно в зависимост от това, дали M_0 и O лежат в една полуравнина спрямо правата и дължинате му е равна на дължината на HM_0.

Разписваме (#) по координатно и изразяваме координатите на H чрез тези на M_0 и чрез $\vec{n}$.

$$x_0 - x_1 = \delta\cos(\alpha) = ¿\, x_1 = x_0 - \delta\cos(\alpha)$$

$$y_0 - y_1 = \delta\sin(\alpha) = ¿\, y_1 = y_0 - \delta\sin(\alpha)$$

Сега използваме това, че H лежи върху правата и заместваме x_1 и y_1 в (3.1).

Получаваме

$$(x_0 - \delta\cos(\alpha))\cos(\alpha) + (y_0 - \delta\sin(\alpha))\sin(\alpha) - p = 0 \Leftrightarrow x_0\cos(\alpha) + y_0\sin(\alpha) - p = \delta$$

Последното означава, че за да намерим ориентираното разтояние от точка до права е достатъчно да заместим координатите и в нормалното уравнение на правата.

Да забележим, че можеше да образуваме уравнението и с - $\vec{n}$. Тогава свободния коефициент щеше да бъде положителен. Заключваме, че всяка права има точно две нормални уравнения, но те се получават едно от друго. За определеност може да се работи с това уравнение, в което свободния коефициент е отрицателен, тоест $\vec{n}$ сочи от центъра на координатната система към правата.

Нормалното уравнение (3.1) може да се получи от (2.1). Тъй като (-B,A) || g, то (A,B) е перпендикулярен на правата. Да раздлим (3) на $-sgn(C)\sqrt{A^2+B^2}$. Тогава нормалното уравнение на правата изглежда така:

$$(3.2)\ \frac{Ax+By+C}{-sgn(C)\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Тук $\vec{n} = \left(\frac{A}{-sgn(C)\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{-sgn(C)\sqrt{A^2+B^2}}\right)$, а ориентираното разтояние от O до правата е $\frac{C}{sgn(C)\sqrt{A^2+B^2}}$.

Можем лесно да намерим ъгъл между две прави, използвайки общия вид на уравненията им (2.1). Нека $g_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ и g_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Ъгълът межджу тях е равен на ъгъла между техните нормални вектори $p_1(A_1, B_1)\, и\, p_2(A_2, B_2)$. Както знаем,

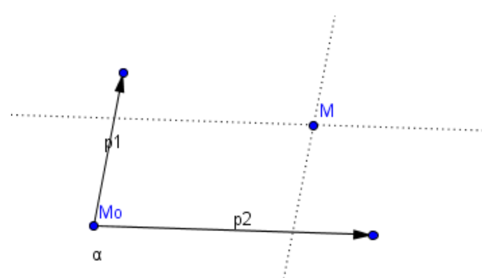
$$\vec{p}_1 . \vec{p}_2 = A_1 . A_2 + B_1 . B_2 = ¿\, \vec{p}_1 \vee ¿\, \vec{p}_2 \vee \cos(¿(\vec{p}_1, \vec{p}_2))$$

От тук и от основното тригонометрично равенство следват формулите

$$A_1{}^2 + A_2{}^2$$
$$¿$$
$$¿$$
$$\sqrt{¿}$$
$$(3.3)\cos\left(¿\left(\vec{p}_1, \vec{p}_2\right)\right) = \frac{A_1 . A_2 + B_1 . B_2}{¿}$$

$$A_1{}^2 + A_2{}^2$$
$$¿$$
$$¿$$
$$\sqrt{¿}$$
$$¿\, A_1 B_2 - A_2 B_1 \vee \frac{¿}{¿}$$
$$(3.4)\sin(¿(\vec{p}_1, \vec{p}_2)) = ¿$$

4
Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.



фигура

Според аксиомите на Евклид, една равнина α може да се определи от точка върху нея $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два успоредни на равнината, но неколинеарни помежду си вектори $\overset{-¿}{p_1}(x_1, y_1, z_1), \overset{-¿}{p_2}(x_2, y_2, z_2)$. Това става чрез пренасяне на тези вектори във точката. За произволна точка $M(x, y, z) \epsilon \alpha$ можем да намерим реални числа $\lambda\, и\, \mu$ (чрез проектиране-Фиг.5), така че

(4.1) $M_0 \overset{-¿}{M} = \lambda \overset{-¿}{p_1} + \mu \overset{-¿}{p_2}$, което се разпада покомпонентно на

$$x = x_0 + \lambda x_1 + \mu x_2$$

$$(4.2)\quad y = y_0 + \lambda y_1 + \mu y_2$$

$$z = z_0 + \lambda z_1 + \mu z_2$$

4.1 е векторно уравнение на равнина, а 4.2 параметрично. За да изведем общото уравнение на равнина ще използваме един аналитичен израз на това, че $\overset{-¿}{M_0 M}$, $\overset{-¿}{p_1}$, $\overset{-¿}{p_2}$ са компланарни. То има вида

$$(4.3)\ Det\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

Теорема 3. *Координатите x, y, z на произволна точка от равнина в пространството удовлетворяват условие от вида*

$$(4.4)\quad Ax + By + Cz + D = 0\ ,$$

където е изпълнено (4.5) $¿A \vee + ¿B \vee + ¿C \vee \neq 0$.

Обратното, всяко уравнение от вида 4.4 при условие 4.5 е уравнение на равнина.

Доказателство:

(=>) Нека координатите x, y, z описват равнина. Можем да изберем подходяща точка M_0 и компланарни на равнината, но не колинеарни помежду си вектори $\overset{-¿}{p_1}$, $\overset{-¿}{p_2}$. Нека M(x, y, z) е точка от равнината. Разпсваме (4.3) и полагаме

$$A := b_1 c_2 - b_2 c_1\ B := c_1 a_2 - c_2 a_1$$

$$C := a_1 b_2 - a_2 b_1\ D := -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

Получаваме Ax+By+Cz+D=0. Да допуснем, че A=B=C=0. Тези условия са еквивалентни на колинеарност между векторите $\overset{-¿}{p_1}$, $\overset{-¿}{p_2}$. Следователно $¿A \vee + ¿B \vee + ¿C \vee \neq 0$

(<=) Нека имаме кординатите (x,y,z) са реалните решения на 4.4 при условие 4.5. Да изберем произволно от тях : $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и да дефинираме векторите

$$p_1(-B, A, 0)\ и\ p_2\left(\frac{-C}{A}, 0, 1\right)$$

Да разгледаме равнината определена от тези три обекта. Според 4.3 имаме

$$Det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ -B & A & 0 \\ \frac{-C}{A} & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

което след разписване придобива вида 4.4

<u>Теорема 4. (без доказателство)</u> Векторът $\vec{p}(\lambda,\mu,\nu)$ *е компланарен на равнината , дефинирана от 4.4 и 4.5 тогава и само тогава, когато*

$$(4.6)\quad A\lambda + B\mu + C\nu = 0$$

Ще изброим критерий за успоредност на равнина на координатните равнини и оси. Равнина, определена от 4.4 и 4.5 е успоредна на:

Равнината Oyz	когато	B=C=0
Равнината Ozx		C=A=0
Равнината Oxy		A=B=0
Оста Ox		A=0
Оста Oy		B=0
Оста Oz		C=0

<u>Теорема 5.</u> Критерии за взаимно положение на две равнни. Нека разгледаме равнините

$$\epsilon_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\epsilon_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

5.1 ϵ_1, ϵ_2 *съвпадат точно тогава, когато всички координати са пропорционални, тоест*

$$(4.7)\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Тук ако например $A_1=0$*, то трябва и* $A_2=0$ *и обратното;*

5.2 ϵ_1, ϵ_2 *са успоредни точно когато съществува число* $\rho \neq 0$ *, такова, че*

$$(4.8)\ \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \rho \neq \frac{D_1}{D_2}$$

Тук ако например $A_1=0$*, то трябва и* $A_2=0$ *и обратното;*

5.3 ϵ_1, ϵ_2 се пресичат точно когато нито 4.4 нито 4.5

По подобен начин в случая на права в равнината можем да образуваме **нормално урвнение на равнина**, което да ни служи за намиране на разтояние от точка до равнина. Нека е зададена равнина с уравнението 4.4 при предположение 4.5. Нормалното уравнение, съответстващо на тази равнина е

$$(4.9)\frac{Ax+By+Cz+D}{-sgn(D)\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

Нека разгледаме точката $M_0(x_0,y_0,z_0)$. Разтоянието от нея до равнината се дава с форулата

$$(4.10)\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{-sgn(D)\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

5
Уравнение на окръжност. Канонични уравнения на елипса, хипербола и парабола. Фокални свойства на елипса, хипербола и парабола

Уравнение на окръжност. Въпреки, че окръжността е частен случей на елипса, ще я разгледаме отделно. Окръжността е геометрично място на точки в равнина, на равно разтояние- радиус от фиксирана точка-център в същата равнина. Нека центъра на окръжността е O(a,b) и радиусът и е R>0. Необходимо и достатъчно аналитично условие точка от равнината (x,y)да лежи на окръжността е разтоянието и до O да е R, т.е.

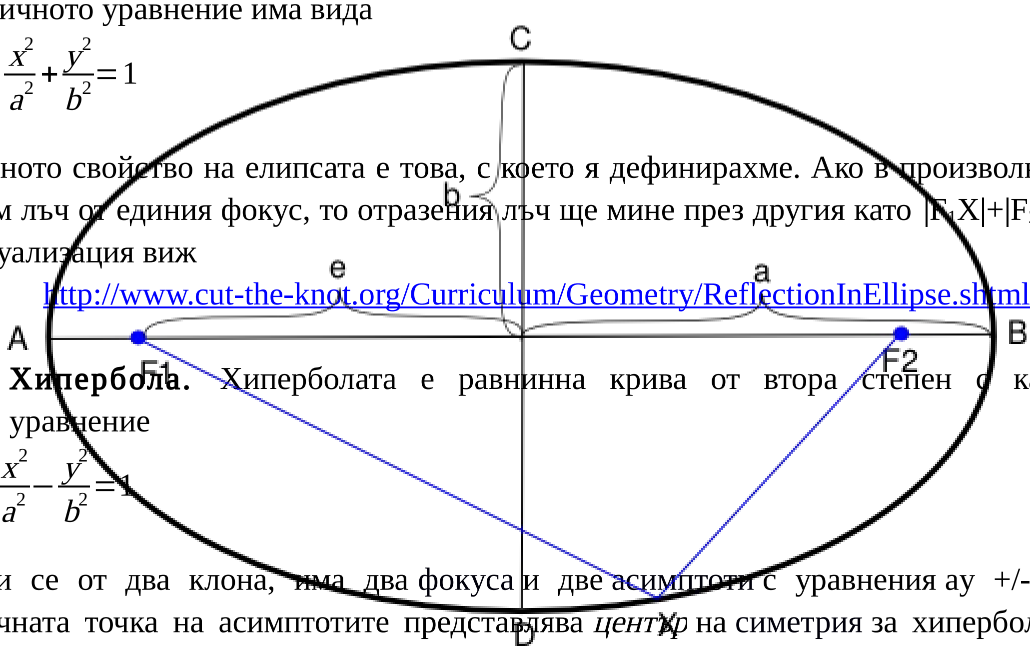
$$(5.1)(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$ (виж фигура 6.)

Ако разгледаме по- общото уравнение , $(5.2)\, x^2+y^2+lx+my+n=0$, то след отделяне на точен квадрат получаваме

$$(5.3)\quad \left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)=\frac{l^2}{4}+\frac{m^2}{4}-n \quad ,$$

което е уравнение на окръжност тогава и само тогава, когато $l^2+m^2-4n>0$.

Елипса. Елпсата е геометрично място на точки, сумата от разтоянията от които до фиксирани две точки в равнината(фокуси) е постоянно (може и да се зададе директно с уравнението си 5.4) . Тя има голяма и малка полуоси с дължини a и b. Разтоянието от фокусите до центъра е ексцентрицитет и показва до колко е „сплескана”(фигура 6).



Фигура 6.

Каноничното уравнение има вида

$$(5.4)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

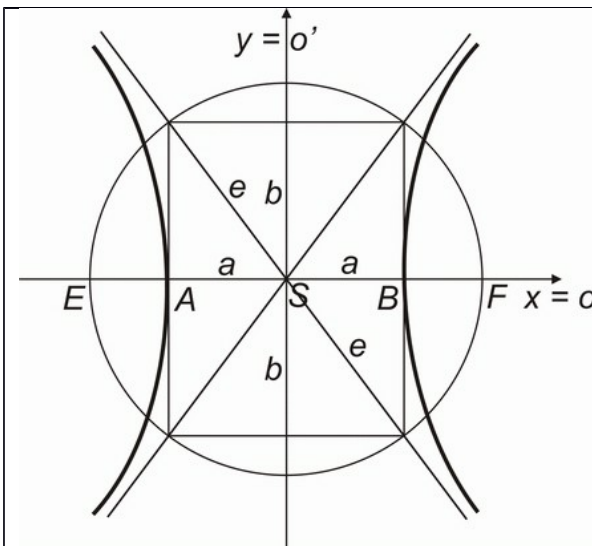
Фокалното свойство на елипсата е това, с което я дефинирахме. Ако в произволна посока пуснем лъч от единия фокус, то отразения лъч ще мине през другия като $|F_1X|+|F_2X|=const$. За визуализация виж

http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ReflectionInEllipse.shtml

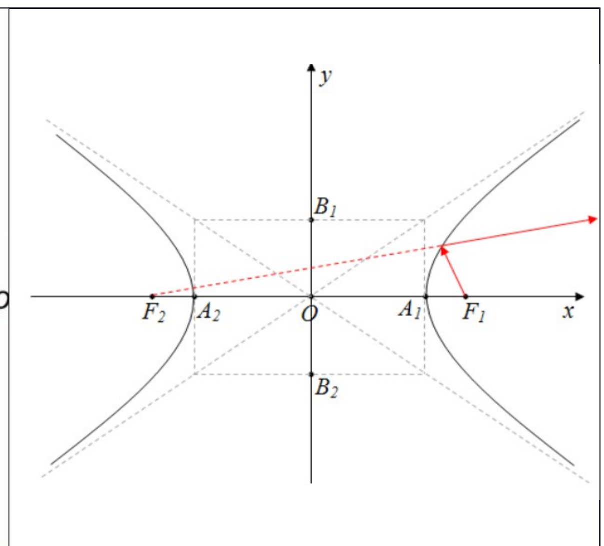
Хипербола. Хиперболата е равнинна крива от втора степен с канонично уравнение

$$(5.4)\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Състои се от два клона, има два фокуса и две асимптоти с уравнения ay +/- bx = 0. Пресечната точка на асимптотите представлява *център* на симетрия за хиперболата. При това центърът на хиперболата е в началото на координатната система. Оста на хиперболата, наречена *главна ос*, съвпада с оста *x*. Върховете ѝ са с координати (*a*,0) и (-*a*,0) (Фигура 7).



Фигура 7.



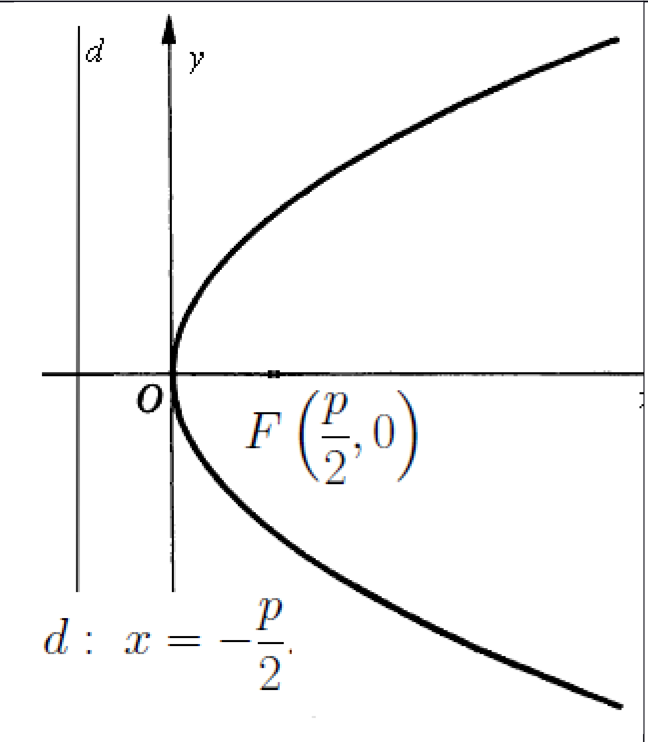
Фигура 8.

Хиперболата има следното оптично свойство: Ако от единия фокус на хипербола бъде пуснат светлинен лъч, то след отразяването му от хиперболата неговото продължение ще мине през

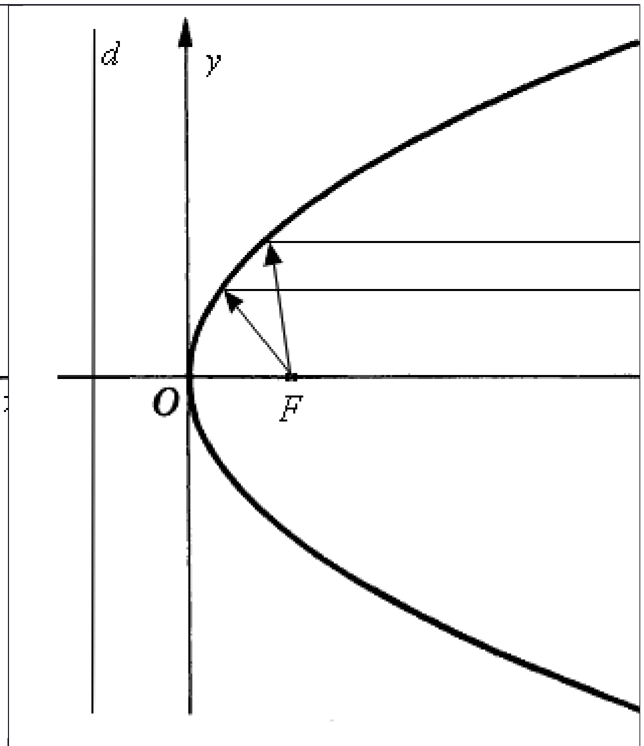
другия и фокус (фигура 8)

Парабола. Параболата(фигура 9) е равнинна крива от втора степен с канонично уравнение

(5.5) $y=2px^2, p>0$



Фигура 9



Фигура 10

Фокалното свойство на параболата се вижда на фигура 10.

<u>Примерна задача, свързана с тема 1, давана на Държавен изпит.</u>

Задача 1, юлска сесия, 2003 година

Зад.1

Спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ в равнината са дадени точка $A(-1/2, 3)$, правите

a: 3x - 4y + 1 = 0;

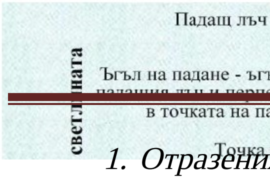
b: 10x - 5y +1 = 0.

Светлинен лъч l през точка A след отразяването си от правата a става успореден на правата b.

Да се намерят уравненията на падащия и отразения лъч.

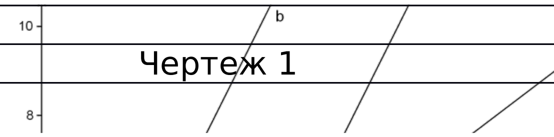
Решение: Преди да направим чертеж и някакви разсъждения за самите прави и точки, да припомним законите за падане и отражение на светлината.

Закон за отражение на светлината:



1. Отразеният лъч, падащият лъч и перпендикулярът в точката на падане лежат в една равнина.

2. Ъгълът на падане(фиг.11) (α) е равен на ъгъла на отражение (β)



Фигура 11	Чертеж 1

Да спуснем перпендикуляр от AM към правата a. Нека точката на падане на лъча върху a да е F. Отразения лъч пресича $\overrightarrow{AM}$ в точка A'. Поради това, че ъгъла на падане е равен на ъгъла на отражение следва, че ъглите AFM и MFA' са равни. Тогава тр. AFM $\simeq$ тр. A'FM и следователно AM=MA'. Ще намерим координатите на A' за да намерим уравнението на отразения лъч. Предварително знаем, че то има вида

Отразен лъч: $10x-5y+Q=0$,

тъй като е отразения лъч е успореден на b.
За да намерим координатите на A' първо ще намерим уравнението на правата AM. (3,-4) е нормален вектор за a следователно успореден за AM. Нейното параметричноуравнение има вида

Права през AM: $4x+3y+P=0$

От условието , че A принадлежи на тази права намираме P=-11 (чрез заместване на координатите на A в уравнението).Сега намираме координатите на M решавайки системата

$4x+3y-7=0$

$3x-4y+1=0$

Получаваме M($1,1$). Ако запишем уравнението на правата през AM в параметричен вид спрямо M, то ще изжлежда така:

$x=1+3\lambda, y=1-4\lambda, \lambda\epsilon R$

Точката А се получава за $\lambda=\frac{-1}{2}$, съответно точката А' ще се получи за $\lambda=\frac{1}{2}$.

Следователно А'($\frac{5}{2},-1¿$. Заместваме в $10x-5y+Q=0$ и получаваме Q=-30. След съкращаване на 5 окончателно получаваме

Отразен лъч: $2x-y-6=0$.

За да намерим уравнението на падащия лъч трябва само да намерим координатите на т.F. Те са решението на системата

$2x-y-6=0$

$3x-4y+1=0$

Решението на системата отговаря на F(5,4). Сега чрез точките А и F строим параметричното уравнение на падащия лъч:

Падащ лъч: $x=\frac{-1}{2}+\frac{11}{2}\lambda, y=3+\lambda$, $\lambda \epsilon R$

▪

Литература:

[1] Грозьо Станилов, Аналитична Геометрия, Университетско издателство
[2] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/ReflectionInEllipse.shtml
[3] Wikipedia

Темата е разработена от Велико Дончев, уч. 2011/2012 г.