СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

# КОНСПЕКТ

ЗА

ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА

ОБРАЗОВАТЕЛНО – КВАЛИФИКАЦИОННА

СТЕПЕН „БАКАЛАВЪР“

## СПЕЦИАЛНОСТ

## „ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“

Промените в конспектите за ДИ са приети с
решение на ФС – Протокол № 05/29.05.2017 г.

СОФИЯ • 2018

При явяване на държавен изпит всеки студент е длъжен да носи студентската си книжка, да се яви навреме пред предварително оповестената зала и да спази указанията на квесторите за настаняване в залата.

Държавният изпит по специалност *„Приложна математика“* е в две части, които се провеждат в два дни. През първия ден изпитът е практически (решаване на задачи) с продължителност 3 астрономически часа. Към въпроси с номера от 1 до 8 и от 10 до 19, могат да бъдат дадени задачи. Втория ден изпитът е теоретичен. Изтегля се един въпрос, който се развива за 2 астрономически часа. Работите се предават и се прави кратка почивка. Тегли се втори въпрос, който също се развива за 2 часа.

По време на всяка една част от изпита листата за писане са осигурени и подпечатани от ФМИ, други не се внасят. Пише се само с химикал - задължително син или черен цвят. Молив може да се използва само за чертежи.

По време на изпита може да се използва официално издадено копие на конспекта (получава се от квесторите). Всички други пособия са забранени.

Забранено е използването на електронни устройства от всякакъв вид. Необходимо е всички внесени мобилни устройства и компютърна техника да бъдат изключени преди започване на изпита и да бъдат оставени на определените за целта места. Намирането при студентите на нерегламентирани помощни средства се счита за опит за преписване. По време на изпита не се водят разговори, не се пуши и не се излиза от залата.

Работите се оценяват от комисия. Практическият и теоретичният изпит се оценяват поотделно. При положение, че и на двата изпита оценката е по-голяма или равна на 3.00, то крайната оценка от държавния изпит е закръглената по правилата средно аритметична оценка от двата изпита. В противен случай оценката е слаб (2.00). Оценката се закръгля до втори знак след десетичната запетая. Оценките са окончателни и не подлежат на преразглеждане.

Според правилника на СУ студентите нямат право на явяване за повишаване на оценка от ДИ, ако той е бил успешно положен. Напомняме на студентите, че според ЗВО за продължаване на образованието в ОКС „Магистър“ **(срещу заплащане)** е необходима оценка най-малко „добър” от дипломата за ОКС „Бакалавър”.

# КОНСПЕКТ ЗА ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ
# ЗА СПЕЦИАЛНОСТ "ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА"

1. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.
2. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.
3. Неразложими полиноми над поле. Разлагане на полином на неразложими множители над поле. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.
4. Граница, непрекъснатост, производна и примитивна на функция на една променлива. Геометрични интерпретации.
5. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.
6. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон – Лайбниц.
7. Степенни редове. Радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.
8. Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.
9. Холоморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.
10. Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.
11. Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе.
12. Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.
13. Метод на Фурие за решаване на уравнението на струната.
14. Диференчни методи за задачата на Коши за обикновено диференциално уравнение от първи ред.
15. Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.
16. Квадратурни формули на Нютон – Коутс и Гаус.
17. Задача на линейното оптимиране. Основни теореми.
18. Достатъчно условие за оптималност. Диференциална форма на Теоремата на Кун и Такер.
19. Случайни величини с непрекъснати разпределения. Нормално разпределение. Равномерно разпределение, експоненциално разпределение или гама разпределение. Задачи, в които възникват.
20. Линеен регресионен модел. Метод на най-малките квадрати. Теорема на Гаус – Марков.
21. Минимизация на детерминирани крайни автомати.
22. Поведение на потребителя. Уравнение на Слуцки. Видове стоки.
23. Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.
24. Основни теореми на динамиката на материална точка.

# АНОТАЦИИ НА ВЪПРОСИТЕ

1. **Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли. Криви от втора степен.**

Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина. Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Ъгъл между прави.

Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.

Уравнение на окръжност. Канонични уравнения на елипса, хипербола и парабола. Фокални свойства на елипса, хипербола и парабола.

*Литература:* [27].

*Литература:* [25].

2. **Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.**

Симетричен оператор – определение, матрица спрямо ортонормиран базис. Всички характеристични корени на симетричен оператор са реални числа; всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си; съществува ортонормиран базис на пространството, в който матрицата на симетричен оператор е диагонална.

*Примерна задача:* За даден симетричен оператор да се намерят ортонормиран базис на пространството, в който матрицата му е диагонална, както и самата матрица.

*Литература:* [25].

3. **Неразложими полиноми над поле. Разлагане на полином на неразложими множители над поле. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.**

Теорема за еднозначно разлагане на неразложими множители. Критерий на Айзенщайн.Полето на комплексните числа е алгебрически затворено. Следствия - всеки полином с комплексни коефициенти се разлага в произведение на линейни множители; всеки полином с реални коефициенти се разлага в произведение на линейни и квадратни множители; формули на Виет.

*Примерни задачи:* Неразложимост на полиноми. Прилагане на формулите на Виет за полином с числови коефициенти.

*Литература:* [25].

4. **Граница, непрекъснатост, производна и примитивна на функция на една променлива. Геометрични интерпретации.**

Дефиниции на Хайне и Коши за *граница на функция* (в крайна точка и в безкрайността); доказателство на еквивалентността на двете дефиниции. Да се дефинира *непрекъснатост* на функция в дадена точка от дефиниционната област чрез дефинициите на Хайне и Коши. Дефиниция на *производна* на функция в дадена точка като граница на *диференчните частни*. Да се обясни физичната интерпретация на производната (моментна скорост) и геометричната ѝ интерпретация (ъглов коефициент на *допирателната* към графиката на функцията в съответната точка, при което допирателната права се въвежда като гранично положение на *секущите* прави). Формули (с доказателствата им) за производна на сума, произведение, частно и *суперпозиция* (*съставна функция*) на две диференцируеми функции. Намиране на производните на някои елементарни функции (*степенна функция, показателна функция, основни тригонометрични функции*). От формулата за производна на съставна функция се извежда (формално) формулата за производна на *обратна функция* и се прилага за намиране на производните на функциите *логаритъм* и *аркуссинус*). Дефиниция на *примитивна* на дадена функция и доказателство, че ако дефиниционната област на една функция е интервал, то разликата между всеки две нейни примитивни е константа.

*Литература:* [16],[29], [30].

**5. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.**

Необходимо е да се докажат следните теореми, формулирани общо за по-кратко.

Нека $f$ е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и притежава производна поне в отворения интервал $(a,b)$. Да се докаже, че:

а) ако $f(a) = f(b)$, то съществува $c \in (a, b)$, така че $f'(c) = 0$ (Рол);

б) съществува $c \in (a, b)$, така че $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (Лагранж);

в) ако $g$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал $(a, b)$, $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, то съществува $c \in (a, b)$, така че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{(Коши).}$$

За доказателството на теоремата на Рол (а) да се използва (без доказателство!) теоремата на Вайерщрас, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал достига своя максимум и минимум.

Необходимо е още да се изведе формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж и Коши.

*Примерни задачи.* Нека $f(t) = a(1 - t)\cos at - \sin at$, където $a$ е произволно фиксирано реално число:

а) да се пресметне $\int_0^x f(t)\,dt$;

б) като се използва теоремата на Рол, да се докаже, че уравнението $f(t) = 0$ има
поне един корен в интервала (0,1).

*Литература:* [16], [18], [19], [29], [30].

**6. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон – Лайбниц.**

Да се дефинират последователно: разбиване на интервал, диаметър на разбиване, риманова сума и риманов интеграл. Да се покаже, че всяка интегруема по Риман функция е ограничена. Да се дефинират големи и малки суми на Дарбу.

Да се установи, че при добавяне на нови точки в разбиването на интервала големите суми на Дарбу не нарастват, а малките не намаляват (желателно е да се направи чертеж).

Да се докаже, че дадена функция е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват голяма сума на Дарбу $S$ и малка сума на Дарбу $s$ такива, че $S - s < \varepsilon$. Като се използва тази теорема и теоремата на Кантор, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната, да се докаже, че всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман. Да се изброят (без доказателство) основните свойства на Римановия интеграл. Като се приложи свойството за интегриране на неравенства и теоремата, че всяка непрекъсната функция приема всички стойности между максимума и минимума си, да се докаже, че ако $f$ е непрекъсната в $[a, b]$, то съществува $c \in [a, b]$, така че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Като се използва този факт, да се докаже теоремата на Нютон – Лайбниц, т.е. че ако $f$ е непрекъсната в $[a, b]$, то за всяко $x \in [a, b]$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

и да се покаже как тя се използва за изчисляване на определен интеграл.

*Примерни задачи.* Смяна на променливите и интегриране по части; интегриране на рационални функции; интеграли от вида

$$\int_b^c \frac{dx}{(x^2+y^2)^2};$$

субституции за интегриране на рационални функции от $\sin x$ и $\cos x$; субституции на Ойлер.

*Литература:* [16], [18], [19], [29], [30].

### 7. Степенни редове. Радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.

Да се дефинира степенен ред на комплексна променлива и област на сходимост на такъв ред. Да се докаже, че ако един степенен ред е сходящ за някое комплексно число $z_0 \in \mathrm{J}$, то той е абсолютно сходящ за всяко друго $z$ при $|z| < |z_0|$.

Да се докаже, че областта на сходимост е кръг с радиус $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$,

където $a_n$ са коефициентите на степенния ред.

Като се използва формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, да се развият в степенен ред при реални стойности на $x$ функциите $e^x$, sin *x*, cos *x*. За целта да се намерят стойностите на всички производни на тези функции при *x* = 0.

*Литература:* [16], [18], [19], [29], [30].

**8. Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.**

Дефиниция на гладка крива в равнината, зададена параметрично; формула за дължината ѝ. Риманови суми за криволинейни интеграли от първи и втори род и свойствата им. Формули за свеждане на криволинейните интеграли към риманови. Доказателство на формулата на Грийн

$$\int_C Pdx+Qdy=\iint_{\overline{D}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Да се разгледа първо случаят, когато $\overline{D}$ може да се представи във вида $\overline{D}$ = $\{(x,\ y)\ \in$ Ў$^2$, $x_1 \le x \le x_{2,}\ \ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, а функцията *Q* (*x, y*) е тъждествено нула, и да се покаже, че горната формула следва от формулата на Лайбниц – Нютон. Да се обясни накратко как от този частен случай се извежда общият случай.

*Литература:* [16], [18], [19], [29], [30].

**9. Холоморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.**

Да се дефинират: Ў - диференцируемост, J - диференцируемост и холоморфност на функция на комлексна променлива. Да се докаже, че уравнението на Коши-Риман и Ў - диференцируемостта са необходими и достатъчни за J - диференцируемост. Да се дефинира конформно изображение и да се докаже, че ако $f(z)$ е холоморфна в $z_0$ и $f'(z_0)\neq 0$, то изображението $w=f(z)$ е конформно в $z_0$. Да се формулира основната теорема на Коши за едносвързана област. Да се докаже вариантът на теоремата чрез формулата на Грийн. Да се докаже формулата на Коши. За доказателството ѝ да се изпозва наготово (без доказателство) теоремата на Коши за сложен контур.

*Задачи:* Възстановяване на холоморфна функция по дадена реална (имагинерна) част.

*Примерни задачи:* 1. Да се намери холоморфна функция $f(z)=u+iv$, за която

а) $u(x,y)=x^2-y^2-e^y\sin x$;

б) $u(x,y)=\varphi(x^2-y^2)$, където $\varphi$ : Ў $\to$ Ў е двукратно гладка функция.

*Литература:* [3], [4], [6], [31].

**10. Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.**

Да се докаже теоремата на Лоран за развитие в ред на функция холоморфна във венец. Да се дефинират трите вида изолирани особени точки: отстранима, полюс и съществена особена точка и да се докажат: теоремата на Риман (за отстранима особена точка) и теоремата на Казорати-Вайерщрас – Сохоцки. Да се дефинира резидуум на холоморфна функция в изолирана особена точка и да се докаже теоремата за резидуумите.

*Задачи:* Определяне вида на изолираните особени точки на холоморфна функция и пресмятане на резидуумите в тях. Пресмятане чрез теоремата за резидуумите на контурни интеграли и на реални несобствени интеграли.

*Примерни задачи:*

1. Да се определи видът на изолираните особени точки в $\overline{\mathrm{J}}$ на функцията

$$f(z)=\frac{z^3\sin\frac{1}{z}}{1-z}$$ и да се пресметнат резидуумите в тях.

2. Да се пресметнат:

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{ze^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz\ ;\ \int\limits_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}\ ;\ \int\limits_{-\infty}^\infty\frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx\ ;\ \int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{(x+1)(x^2+x+1)}dx\,.$$

*Литература*: [3], [4], [6], [31].

**11. Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе.**

Векторна функция на скаларен аргумент – дефиниция и свойства. Линии - дефиниция и свойства. Дължина на дъга. Естествен параметър на линия. Триедър и формули на Френе на линия в пространството. Кривина и торзия. Инварианти на линия.

*Примерна задача:* Нека $c:x=x(s), s\in J$ е поне петкратно гладка правилна крива, за която $s$ е естествен параметър. Разглеждаме кривите $c_0:x_0=\int b ds$ и $\bar{c}:\bar{x}=\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{1}{\sqrt{2}}x_0$, където $b$ е бинормалата на кривата $c$.

а) Да се докаже, че ако кривата $c$ има постоянна кривина $\kappa$, то кривата $c_0$ има постоянна торзия $\tau_0$;

б) Да се докаже, че ако кривата $c$ има постоянна кривина $\kappa$, то кривината $\bar{\kappa}$ и торзията $\bar{\tau}$ на кривата $\bar{c}$ удовлетворяват равенството $\varepsilon\bar{\kappa}+\bar{\tau}-\sqrt{2}\kappa=0$, където $\varepsilon=\operatorname{sgn}(\frac{\kappa-\tau}{\sqrt{2}})$;

в) В случая, когато $c:\begin{cases}x^1=\cos(q)\\ x^2=\sin(q), q\in R\\ x^3=q\end{cases}$

да се пресметнат торзията $\tau_0$ на кривата $c_0$ и кривината $\bar{\kappa}$ на кривата $\bar{c}$.

*Литература:* [27], [28].

## 12. Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.

Разглежда се диференциалното уравнение от n-ти ред

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = f(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

където $a_j(t)$ са непрекъснати функции. Формулира се (без доказателство) теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. Дава се критерий за линейна независимост на система от $n$ решения на хомогенното уравнение чрез детерминантата на Вронски. Дефинира се понятието фундаментална система от решения и се доказва, че решенията на хомогенното уравнение (т.е. $f(t) \equiv 0$) образуват $n$ -мерно линейно пространство. Описва се структурата на решенията на нехомогенното уравнение.

Формулира се алгоритъм за намиране на общото решение на уравнението с постоянни коефициенти $a_j \in R$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0.$$

*Примерни задачи:*

1. Да се намерят реалните решения на уравнението:
   а) $y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x$;
   б) $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x, \quad |x| < \dfrac{\pi}{2}$;
   в) $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}, \quad x > 0.$
2. Да се реши задачата на Коши:
   а) $y''' + y' = x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$
   б) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0.$
3. Да се реши уравнението на Ойлер:
   а) $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x$;
   б) $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x, \quad x > 0.$
4. Да се намери общото решение на уравнението, като се намери негово частно решение във вида $y_1 = e^{ax}$ или $y_1 = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$:
   а) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0, \qquad x > 1$;
   б) $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0, \quad x > 0.$

*Литература:* [10], [32].

**13. Метод на Фурие за решаване на уравнението на струната.**

Формулира се смесената задача за уравнението на струната $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ в областта $t \ge 0, \quad 0 \le x \le l$. Разделят се променливите. Извежда се формалното решение във вид на безкраен ред. Кога този ред е сходящ?

*Примерни задачи.* Да се намери решение от $\mathrm{C}^2\left(\overline{D}\right)$ на уравнението $u_{tt} = u_{xx}$, удовлетворяващо условията:

1. $$\begin{cases} u(x,0) = x^4 - 2x^3 + x, \qquad u_t(x,0) = 0 \quad \text{за } 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \ \text{ за } \ t > 1 \end{cases}$$

където $D = \left\{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < 1, \quad t > 0\right\}$.

2. $$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin 5x + \sin x \quad \text{за } 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x\left(\dfrac{\pi}{2}, t\right) = 0 \quad \text{за} \quad t > 0, \end{cases}$$

където $D = \left\{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \dfrac{\pi}{2}, \quad t > 0\right\}$.

3. $$\begin{cases} u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \sin x + (\pi - x)\cos x \quad \text{за} \quad 0 < x < \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \quad \text{за} \quad t > 0, \end{cases}$$

където $D = \left\{(x,t) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < \pi, \quad t > 0\right\}$.

*Литература:* [11], [21], [32].

**14. Диференчни методи за задачата на Коши за обикновено диференциално уравнение от първи ред.**

1. Постановка на задачата на Коши за ОДУ от I ред. Геометрична интерпретация.
2. Същност на диференчните методи. Основни понятия.
3. Методи на Ойлер – явен, неявен, подобрен. Извеждане на трите метода. Апроксимация, устойчивост, и монотонност за един от трите метода.
4. Явни методи на Рунге-Кута за ОДУ от I ред – едно- и двуетапни.

*Литература:* [15], [23].

**15. Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.**

Да се дефинира понятието *неподвижна точка* на изображението $\varphi$ и да се докаже, че ако $\varphi$ е непрекъснато изображение на интервала [*a, b*] в себе си, то $\varphi$ има поне една неподвижна точка в [*a, b*]. Да се покаже, че решаването на уравнението *f* (*x*) = 0 може да се сведе към намиране на неподвижна точка.

Да се дефинира понятието *свиващо изображение* и да се докаже, че ако $\varphi$ е непрекъснато изображение на интервала [*a, b*] в себе си и е свиващо с константа на

Липшиц $q < 1$, то: а) уравнението $x = \varphi(x)$ има единствен корен $\xi$ в $[a, b]$; б) редицата $\{x_n\}$ от последователни приближения (при произволно $x_0 \in [a,b]$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,...)$ клони към $\xi$ при $n \to \infty$, като $|x_n - \xi| \le (b-a)q^n$ за всяко $n$. Да се получи като следствие, че ако $\xi$ е корен на уравнението $x = \varphi(x)$ и $\varphi$ има непрекъсната производна в околност $U$ на $\xi$, за която $|\varphi'(\xi)| < 1$, то при достатъчно добро начално приближение $x_0$ итерационният процес, породен от $\varphi$, е сходящ със скоростта на геометрична прогресия. Да се дефинира понятието *ред на сходимост.*

Да се дадат геометрична илюстрация, формула за последователните приближения и ред на сходимост при: метод на хордите, метод на секущите и метод на Нютон. Да се докаже, че при метода на хордите сходимостта е със скоростта на геометричната прогресия (при условие, че коренът е отделен в достатъчно малък интервал).

*Литература:* [1], [7], [22].

**16. Квадратурни формули на Нютон – Коутс и Гаус.**

Дефиниции на понятията: а) *квадратурна формула* и *грешка* на квадратурна формула; б) *възли* и *коефициенти* на квадратурна формула; в) *интерполационна* квадратурна формула. Доказателство, че една квадратурна формула с $n$+1 възела е интерполационна тогава и само тогава, когато е точна за всеки алгебричен полином от степен $\le n$.

*Елементарни* квадратурни формули: на *правоъгълниците*, на *трапците* и на *Симпсън* заедно с израз за грешката им. Геометрична интерпретация. Извод на грешката при *съставната* формула на *правоъгълниците*.

Дефиниции на понятията: а) *алгебрична степен на точност* (АСТ) на квадратурна формула с тегло; б) алгебричен полином от степен $n$, *ортогонален* в $[a, b]$ с тегло $\mu$ на всички алгебрични полиноми от степен $n$ – 1; в) квадратурна формула на *Гаус* (с тегло). Доказателство, че за всяко естествено $n$ съществува единствена квадратурна формула на Гаус, за която АСТ е $2n$ – 1, и нейните възли са нулите на полинома от степен $n$, ортогонален в $[a, b]$ с тегло $\mu$ на всички алгебрични полиноми от степен $n$ – 1. Оценка за грешката на квадратурна формула на Гаус.

*Литература.* [1], [7], [22].

**17. Задача на линейното оптимиране. Основни теореми.**

Задача на линейното оптимиране в общ вид. Канонична форма. Канонично многостенно множество. Върхове и посоки. Алгебрични характеризации на върховете и посоките на канонично многостенно множество (без доказателство). Теорема за представяне на елементите на канонично многостенно множество (без доказателство). Основни теореми на линейното оптимиране за канонична линейна задача.

*Примерни задачи:* Да се реши със симплекс метода дадената задача. Ако задачата е разрешима да се намери оптималната стойност на целевата функция и множеството от оптимални решения.

$$\max z(x) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$2x_1 - x_2 = -3,$$
$$x_1 - x_3 \le 1,$$
$$x_1 + 4x_3 \le 4,$$
$$x_1 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$\min z(x) = -3x_1 - x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \le 4,$$
$$-x_1 + x_2 \ge -2,$$
$$3x_1 + x_2 \le 22,$$
$$x_1 \ge 0.$$

$$\min z(x) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3$$
$$-2x_1 - x_2 + x_4 = 3,$$
$$x_1 - x_3 = 1,$$
$$3x_1 + x_3 + x_5 = 4,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

$$\max z(x) = -2x_1 - 6x_2$$
$$4x_1 + 2x_2 \ge -9,$$
$$x_1 + 3x_2 \ge 6,$$
$$-3x_1 + 7x_2 \le 61.$$

*Литература:* [5, стр. 65 – 77], [33, Записки по математическо оптимиране-1].

**18. Достатъчно условие за оптималност. Диференциална форма на Теоремата на Кун и Такер.**

Функция на Лагранж. Седлова точка. Достатъчно условие за оптималност (без доказателство). Теорема на Кун и Такер в диференциална форма.

*Примерни задачи:* Като се използват методите на нелинейното оптимиране да се реши задачата

$\min f(x, y) = 8x^2 + 2y^2 - 2x - y$ при ограничения $x + \frac{1}{2y+1} \le 3$ , $y \ge 0$ ;

$\max f(x, y) = 4x + 8y - x^2 - 4y^2$ при ограничения $\frac{1}{x+1} + y \le 2$ , $x \ge 0$ , $y \ge 0$ ;

$\min f(x, y) = x + \frac{1}{2y+1}$ при ограничения $8y - 4x - 2x^2 - y^2 \ge -20$ , $x \ge 0$ , $y \ge 0$ .

*Литература:* [5, стр. 157 – 162], [33, Записки по Математическо оптимиране-2].

## 19. Случайни величини с непрекъснати разпределения. Нормално разпределение. Равномерно разпределение, експоненциално разпределение или гама разпределение. Задачи, в които възникват.

На изпита освен нормалното разпределение комисията дава още едно от изброените три разпределения, върху които се развива въпросът. Дефиниция на непрекъснато разпределение на случайна величина. Свойства на вероятностната плътност (неотрицателност и нормираност). Дефиниция на моментите на разпределението и връзката им с математическото очакване и дисперсия. Дефиниция на пораждаща моментите функция (или по избор на студента - на характеристична функция). Свойства на пораждащата функция на моментите (на характеристичната функция) – без доказателства. За нормалното и даденото разпределение да се посочи пример (задача), при който е уместно използването му, да се даде пораждащата функция на моментите (или характеристичната функция) (без извеждане) и да се пресметнат математическото очакване (със и без пораждаща функция на моментите или характеристична функция) и дисперсията им (методът на пресмятане се избира от студента).

*Литература.* [8],[14].

## 20. Линеен регресионен модел. Метод на най-малките квадрати. Теорема на Гаус – Марков.

Формулира се задачата и модела на линейна регресия в общия случай (с много предиктори). Показва се, че при нормално разпределение на грешките в модела максимално правдоподобните оценки съвпадат с решението на нормалната система уравнения от „метод на най-малките квадрати“. Показва се неизместеност и се извежда дисперсията на оценките. Доказва се теоремата на Гаус – Марков, че оценката на параметрите, получени като решение на нормалната система уравнения, са с минимална дисперсия (относно всички линейни неизместени оценки).

*Литература*: [9].

## 21. Минимизация на детерминирани крайни автомати.

Дефиниции за краен автомат и автоматен език. Еквивалентни автомати. Детерминирани и тотални автомати. Недостижими и неразличими (еквивалентни) състояния. Дефиниция за минимален автомат. Намиране на минимален автомат, еквивалентен на даден тотален детерминиран автомат. Дясна полуконгруентност относно даден език и нейното приложение към въпроса за единственост (с точност до изоморфизъм) на минималния автомат, еквивалентен на даден тотален детерминиран автомат.

*Описание на задачите.* Задачи за минимизация на конкретно даден тотален детерминиран автомат (т.е. за намиране на минимален автомат, еквивалентен на дадения).

*Примерна задача.* Да се минимизира тоталният детерминиран автомат над азбуката {0, 1}, имащ състояния *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, където *A* е началното състояние, *C* и *E* са заключителните, а преходите се определят с помощта на следната таблица:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | B | B | D | D | B | C | F |
| 1 | D | C | E | E | C | G | E |

*Литература:* [12], [13], [20].

**22. Поведение на потребителя. Уравнение на Слуцки. Видове стоки.**

Дефиниция на функция на полезност и принцип на предпочитанието. Максимизация на полезността и функции на потребителското търсене. Минимизация на разноските и компенсирани функции на търсене. Функция на разноските и уравнение на Слуцки. Видове стоки и трудът като стока.

*Литература.* [26] стр. 125-150.

**23. Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.**

Постановка на задачата за брахистохроната като задача за най-бързо преместване на несвободна материална точка в потенциално силово поле (хомогенното поле на силата на тежестта) по предварително неизвестна крива. Интеграл на енергията. Интерпретация на задачата като вариационна задача за екстремум на функционал. Извод на уравнението на Ойлер като необходимо условие за екстремум на функционала. Основна лема на вариационното смятане. Циклоидата като решение на задачата за брахистохроната.

*Литература:* [2], [10], [17].

**24. Основни теореми на динамиката на материална точка.**

1. За свободна материална точка:

Теорема за изменение на количеството движение.

Теорема за изменение на момента на количеството на движение и свойства на движението на точка под действие на централна сила. Теорема за изменение на кинетичната енергия. Потенциално силово поле – силови линии, еквипотен-циални повърхнини, потенциална енергия. Теорема за съхранение на пълната енергия (интеграл на енергията).

2. За несвободна материална точка при идеални връзки (без триене):

Изменение (съхранение) на енергията при движение на точка по подвижна (неподвижна) крива в хомогенното поле на силата на тежестта.

*Литература:* [2], [17].

# ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев,А., и др. Сборник от задачи по числени методи. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
2. Анчев, А., Л. Лилов, Ст. Радев. Лекции по аналитична механика, I ч. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1988.
3. Аргирова, Т. Теория на аналитичните функции. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1992.
4. Аргирова, Т., Т. Генчев. Сборник от задачи по теория на аналитичните функции. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1992.
5. Базара, М., К. Шетти. Нелинейное программирование. Мир, Москва, 1982.
6. Бояджиев П., В. Хаджийски, Комплексен анализ - Ръководство, Университетско издателство „Св. Кл. Охридски”, София, 2004.
7. Боянов, Б. Лекции по числени методи. Дарба, София, 1998.
8. Въндев, Д. Записки по теория на вероятностите. Електронно издание: http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/statist/personal/vandev/lectures/prob/prob.htm
9. Въндев, Д., Приложна статистика т.1 и т.2. Електронно издание: http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/statist/Personal/Vandev/lectures/applstat1.pdf; http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/statist/Personal/Vandev/lectures/applstat2.pdf
10. Генчев, Т. Обикновени диференциални уравнения, III изд. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1999.
11. Генчев, Т. Частни диференциални уравнения. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1999.
12. Денев Й., С. Щраков. Дискретна математика. ЮЗУ "Неофит Рилски", Благоевград, 1995.
13. Денев, Й., Р. Павлов, Я. Деметрович. Дискретна математика, Наука и изкуство, София, 1984.
14. Димитров, Б., Н. Янев. Вероятности и статистика. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1990.
15. Димова, Ст., Т. Черногорова, А. Йотова. Лекции по числени методи за диференциални уравнения. Електронно издание: http://www.fmi.uni-sofia.bg/econtent/chmdu.
16. Дойчинов, Д. Математически анализ. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
17. Долапчиев, Бл. Аналитична механика, II изд. Наука и изкуство, София, 1966.
18. Илин, В., В. Садовничи, Бл. Сендов. Математически анализ, ч. I. Наука и изкуство, София, 1984.
19. Илин, В., В. Садовничи, Бл. Сендов. Математически анализ, ч. II. Наука и изкуство, София, 1989.
20. Манев, К. Увод в дискретната математика. Издателство на НБУ, София, 1996 (I изд.), 1998 (II изд.).
21. Попиванов П., Попиванов Н., Йорданов Й., Ръководство за упражнения по ЧДУ, Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1996.
22. Сендов, Бл., В. Попов. Числени методи, ч. I. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1996.
23. Сендов, Бл., В. Попов. Числени методи, ч. II. Наука и изкуство, София, 1978.
   Димова, Ст., Т. Черногорова, А. Йотова. Числени методи за диференциални уравнения, Университетско издателство “Св. Климент Охридски“(2010).
24. Сидеров, Пл., Чакърян, К., Записки по алгебра: групи, пръстени, полиноми, Веди, София, 2014.
25. Сидеров, Пл., Чакърян, К., Записки по алгебра: линейна алгебра, Веди, София, 2014.

26. Смит, Ал. Математическо въведение в икономиката. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 2000.
27. Станилов, Гр. Аналитична геометрия. Софтех, София, 1998.
28. Станилов, Гр. Диференциална геометрия. Тилия, София, 1997.
29. Тагамлицки, Я. Диференциално смятане. Наука и изкуство, София, 1978.
30. Тагамлицки, Я. Интегрално смятане. Наука и изкуство, София, 1978.
31. Христов Е., Кр. Влъчкова. Задачи и теореми по комплексен анализ, 2007.
32. http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/diff_equ/exams.html
33. http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/or/mo.htm