СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛИМЕНТ ОХРИДСКИ“
ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНО-КВАЛИФИКАЦИОННА СТЕПЕН „БАКАЛАВЪР“
СПЕЦИАЛНОСТ „МАТЕМАТИКА“
СПЕЦИАЛНОСТ „ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА“

7 септември 2022 г.

Задача 1.Нека $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ е стандартният базис в евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ и $\varphi \in Hom(\mathbb{R}^3)$ е линеен оператор, действащ по правилото:

$$\varphi(\xi_1\mathbf{e_1} + \xi_2\mathbf{e_2} + \xi_3\mathbf{e_3}) = (-3\xi_1 - 4\xi_2 - 2\xi_3)\mathbf{e_1} + (-4\xi_1 - 3\xi_2 - 2\xi_3)\mathbf{e_2} + (-2\xi_1 - 2\xi_2)\mathbf{e_3}$$

а) Да се намери матрицата A на оператора φ в този базис;

б) Да се намери ортонормиран базис от собствени вектори $\mathbf{v} = (\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3})$ на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на линейния оператор φ е диагонална;

в) Да се напише матрицата на прехода $T_{e\to v}$ и диагоналната матрица D на оператора φ;

г) Да се пресметне A^n;

д) Нека B е симетрична матрица с реални елементи (т.е. $B \in M_n(\mathbb{R})$), за която $B^3 + B = 0$. Докажете, че следата на B е равна на 0, т.е. $\mathrm{tr}\ B = 0$. (Следата на квадратна матрица е равна на сумата от елементите по главния ѝ диагонал).

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден ромб $ABCD$, чиито диагонали (AC и BD) се пресичат в точка $M(1, 6)$. Точките $P(3, 0)$, $Q(6, 6)$ и $R(5, 9)$ лежат съответно върху правите AB, BC и CD. Да се намерят координатите на точките P', Q' и R'– симетрични, относно точката M съответно на точките P, Q и R, както и уравненията на страните на робма.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = x^3 - x - 1$.

а) Да се докаже, че уравнението $f(x) = 0$ има единствен реален корен ξ, който лежи в интервала $(1, 2)$.

Нека $\{x_n\}_0^\infty$ е редицата от последователни приближения на ξ, получена по метода на хордите за уравнението $f(x) = 0$ и интервала $[1, 2]$ при $x_0 = 1$.

б) Да се намери в явен вид като рационално число първото приближение x_1.

в) Да се представи x_{n+1} във вида $p - \dfrac{q}{g(x_n)}$, където p и q са естествени числа, а g е полином от втора степен.

г) Да се докаже, че

$$|x_n - \xi| \le \left(\frac{5}{9}\right)^n,\ n = 0, 1, \ldots.$$

Време за работа 3 часа.

Оценяват се двете най-добре решени задачи!
Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!