Софийски университет "Свети Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Държавен изпит
за получаване на ОКС "Бакалавър
специалност "Приложна Математика", дата: 09.07.2019 г.

Задача 1. Даден е полиномът

$$f(x) = x^4 - 6ix^3 + px^2 + qx + 3 \in \mathbb{C}[x]$$

с комплексни коефициенти.

(а) Да се намерят стойностите на комплексните параметри p и q, за които корените x_1, x_2, x_3, x_4 на полинома $f(x)$ изпълняват равенствата

$$x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4) \quad \text{и} \quad x_1x_2 = 3x_3x_4. \tag{1}$$

(б) За всеки от полиномите $f(x)$, чиито корени изпълняват условията (1) да се пресметне интеграла

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{f(z)}\, dz$$

по окръжността $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 2019\}$.

Задача 2. Спрямо ортонормирана координатна система $K = O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ в реалното тримерно евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ е дадена кривата

$$c : \begin{cases} x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos q \\ x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin q \\ x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, q \end{cases},$$

където $q \in \mathbb{R}$.

(а) Да се намери вектор $\vec{t}$, колинеарен с допирателната t в произволна точка на кривата c и да се покаже, че той сключва постоянен ъгъл с оста $O\vec{e}_3$;

(б) Да се намерят кривината κ и торзията τ на кривата c.