Факултет по математика и информатика
СУ "Св. Климент Охридски"

Държавен изпит във ФМИ за ОКС "Бакалавър"

специалност "Приложна математика"

12 юли 2016 г.

Задача 1.

Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & p \\ 2 & 4 & 0 \\ p & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

(а) За кои стойности на реалния параметър p операторът φ има собствена стойност 0? За така намерените стойности на p да се намерят ортонормирани базиси на $\mathbb{R}^3$, в които φ има диагонални матрици D, както и тези матрици D.

(б) Да се намерят стойностите на реалния параметър p, за които характеристичните корени x_1, x_2, x_3 на φ изпълняват равенството

$$x_1 + x_2 = 2x_3.$$

Задача 2.

Дадена е моделната задача

(1) $\quad u'(x) = \lambda u(x), \quad \lambda = const < 0, \quad x \in (0, X],$

(2) $\quad u(0) = u_0.$

Върху нея:

а) да се изследва устойчивостта и монотонността на диференчния метод

(3) $$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \theta y'_{i+1} + (1-\theta) y'_i, \quad 0 \le \theta \le 1, \quad y_0 = u_0,$$

където с y_m е означена стойността на приближеното решение на задача (1), (2), получена по метода (3) в точката x_m от равномерната мрежа $\bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, h = \frac{X}{N}, i = 0,1,\dots,N \right\}$, а y'_m е стойността на дясната част на диференциалното уравнение (1) в точката x_m;

б) да се намери приближеното решение на задача (1), (2) с помощта на метода (3) при $u_0 = 1$, $\lambda = -1$, $X = 1$, $\theta = 0$, като в интервала $[0,1]$ се въведе равномерна мрежа със стъпка $h = \frac{h_{\max}}{2}$, където $h_{\max}$ е максималната стъпка, гарантираща устойчивостта и монотонността на метода.