

**Практическа част на държавен изпит
специалност "Приложна математика"**

версия: 22.05.2021

Юли 2002г.

Задача 1. Дадена е матрицата $\begin{pmatrix} 5 & p & -2 \\ p & 5 & 2 \\ -2 & 2 & q \end{pmatrix}$. Намерете p и q , така че собствените стойности да са

$$x_1 = 0, x_2 = 9, x_3 = 9.$$

Задача 2. Дадено е уравнението $y'' + 2ay' + (2a + b)y = 0$. Намерете a и b , така че уравнението да има реални решения.

Октомври 2002г.

Задача 1. Да се пресметне матрицата A^{2002} , ако $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$S = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\left(1 + \frac{3}{5} \cos(x)\right)^2}.$$

Март 2003г.

Задача 1. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 са корените на полинома $f(x) = x^4 + 2x^3 + px^2 + qx + r$. Да се намерят необходимите и достатъчни условия за p, q, r , така че да са изпълнени равенствата $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ и $x_1x_2 = x_3x_4$.

Задача 2. Развийте в ред на Тейлър в околност на $x = 0$ функцията $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - 2 \operatorname{arctg}(x)$, $f(0) = 0$. Да се намери областта на сходимост на получения ред.

Юли 2003г.

Задача 1. Да се пресметне рангът на матрицата $\begin{pmatrix} q & 0 & q-2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & p-q & p-q & 1 \end{pmatrix}$ в зависимост от стойностите на p и q .

Задача 2. Да се пресметне определеният интеграл

$$\int_{\frac{5}{2}}^5 \frac{(\sqrt{25-x^2})^3}{x^4} dx.$$

Септември 2003г.

Задача 1. Намерете границата $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\operatorname{tg}(\frac{x^2}{2})))}{\ln(\cos(3x))}$.

Задача 2. Да се намери в затворената обвивка на областта $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0\}$ по метода на Фурие решение на уравнението $u_{tt} = u_{xx}$, удовлетворяващо условията

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= \sin(3x) + \sin(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ u(0, t) &= 0, & u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) &= 0, & t > 0 \end{aligned}$$

Юли 2004г.

Задача 1. Функцията f е дефинирана в интервала $(-\pi; \pi)$ с равенството

$$f(x) = \begin{cases} \cotg(x) - \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

а) Докажете, че f има непрекъсната производна в $(-\pi; \pi)$ и пресметнете $f'(0)$;

б) Докажете, че f е строго монотонна в $(-\pi; \pi)$;

в) Докажете, че f е вдлъбната в интервала $(0; \pi)$.

Задача 2. Нека

$$I = \int_0^1 e^{x^2} dx.$$

а) Да се докаже, че $\sqrt[4]{e} < I < \frac{e+1}{2}$.

б) Да се намери $n \in \mathbb{N}$, така че съставната квадратурна формула на правоъгълниците с n възела да дава приближение за I с грешка, ненадминаваща 0,001 (обосновете отговора си).

Септември 2004г.

Задача 1. Разложете в ред на Маклорен функцията $f(x) = \frac{x^4-1}{4} \operatorname{arctg}(x) - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4}$. Определете за кои стойности на $x \in \mathbb{R}$ този ред е сходящ.

Задача 2. Дадена е линейната задача

$$\begin{aligned} \max & (3-t)x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

а) Да се реши задачата за $t = 0$.

б) Опишете решението на задачата за стойности на параметъра $t \geq 0$.

Март 2005г.

Задача 1. Да се намери общото решение на уравнението на Ойлер

$$(2x + 1)^2 y'' - 2(2x + 1)y' + 4y = 0, \quad x > -\frac{1}{2}.$$

Задача 2. Независимите случайни величини X и Y имат разпределения съответно

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

и

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{2}}, \quad -\infty < y < \infty.$$

Нека случайната величина Z е дефинирана с

$$Z = \frac{1}{2}X - \frac{2}{5}Y + \frac{7}{13}.$$

Да се намери математическото очакване $E(Z)$ и дисперсията $D(Z)$.

Септември 2005г.

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ е зададен линеен оператор φ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормиран базис.

а) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и самата матрица D .

б) Да се докаже, че $(\varphi - 5\text{Id})(\varphi - \text{Id}) = 0$.

Задача 2. Развийте в степенен ред около 0 (Маклоренов ред) функцията

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{6} \ln\left(\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\right).$$

Определете множеството на реални числа, за които редът е сходящ.

Упътване. Диференцирайте един път!

Март 2006г.

Задача 1. Спрямо ортонормирания базис e_1, e_2, e_3 на евклидовото пространство U е зададен линеен оператор $\psi: U \rightarrow U$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3\sqrt{6} \\ p & 7 & -\sqrt{6} \\ q & r & 2 \end{pmatrix}.$$

Да се определят стойностите на реалните параметри p, q и r , за които операторът ψ е симетричен. За така намерените стойности на p, q и r да се докаже, че характеристичните корени $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ на ψ изпълняват тъждеството

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

В случая, когато $\psi: U \rightarrow U$ е симетричен оператор, да се намери ортонормиран базис на U , в който матрицата D на ψ е диагонална, както и тази матрица D .

Задача 2. Да се реши интегралът

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{\cos^4(x)}.$$

Юли 2006г.

Задача 1. Спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxy$ в равнината са дадени точка $A(-\frac{1}{2}, 3)$, правите $a: 3x - 4y + 1 = 0$ и $b: 10x - 5y + 1 = 0$. Светлинен лъч l през точка A след отразяването си от правата a става успореден на правата b . Да се намерят уравненията на падащия и отразения лъч.

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{x^4 - 2x - 1}{x^5 - x} dx.$$

Задача 3. Седмичните валежи в даден район са нормално разпределена случайна величина с очакване 100см и дисперсия 100см². При валежи над 120см районът се наводнява.

а) Каква е вероятността за наводнение в дадена седмица?

б) Каква е вероятността за пет седмици да има точно две наводнения?

в) Ако случайните величини $\xi, \eta \in N(0,1)$ са независими, да се изведе разпределението на случайната величина $\xi + \eta$.

Квантили на нормалното разпределение:

$$\phi(0,1) = 0,54, \phi(0,2) = 0,579, \phi(0,5) = 0,691, \phi(1) = 0,841, \phi(2) = 0,977.$$

Март 2007г.

Задача 1. Да се намерят реалните решения на уравнението $y'' + 4y = 4x^2 + \sin(2x)$.

Задача 2. Да се изчисли с помощта на теоремата на резидуумите интегралът

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin(2x)}{(x^2 + 4)^2} dx$$

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на евклидовото пространство е зададен линеен оператор $\psi: U \rightarrow U$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ -8 & -1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намери ортонормиран базис на пространството U , в който матрицата D на оператора $\psi: U \rightarrow U$ е диагонална, както и тази матрица D .

б) Да се докаже, че за всеки ненулев елемент $x \in U$ е изпълнено $\left| \frac{(\psi(x), x)}{(x, x)} \right| \leq 9$, където (z, y) е скаларното произведение на елементите z и y .

в) Да се намери матрицата на оператора ψ^{2006} и да се докаже, че числото $\frac{(\psi(x), x)}{(x, x)}$ не зависи от ненулевия елемент $x \in U$.

Юли 2007г.

Задача 1. Да се развие в степенен ред около точката $x = -1$ функцията

$$f(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+2t+2} dt$$

и да се определи областта на сходимост на получения степенен ред.

Задача 2. Нека случайните величини ξ и η да са независими. Случайната величина ξ има плътност

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [0; 2] \\ 0, & x \notin [0; 2]. \end{cases}$$

Случайната величина η има математическо очакване $E(\eta) = 1$ и плътност

$$f_{\eta}(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0, \end{cases}$$

където $\lambda > 0$.

а) Намерете параметъра λ .

б) Намерете математическото очакване $E(\xi)$, дисперсиите $D(\xi)$ и $D(\eta)$, ковариацията $Cov(\xi, \eta)$ и функциите на разпределение на случайните величини ξ и η .

в) Пресметнете дисперсията $D(2\xi + 5\eta)$.

г) Пресметнете вероятността на събитието $\{\xi > \eta\}$.

д) Намерете функцията на разпределение на случайната величина $\min\{\xi, \eta\}$.

Септември 2007г.

Задача 1. Да се запише в явен вид функцията $f: (-\pi; 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, определена от условията $f(\pi) = 0$ и

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(x) + 2\cos(x) + 3}, \forall x \in (-\pi; 2\pi).$$

Задача 2. Спрямо стандартния базис на $\mathbb{R}^3$ линейният оператор φ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на оператора φ е диагонална, както и тази матрица D .

б) Да се намерят минималната и максималната стойност на квадратичната форма $g(x) = (\varphi(x), x)$, $x \in \mathbb{R}^3$ върху сферата $S = \{x \in \mathbb{R}^3: \|x\| = 1\}$.

Март 2008г.

Задача 1. Намерете за кои реални x е сходящ степенният ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+2)^n}{8\sqrt{n+1}}.$$

Задача 2. Намерете квадратурна формула от вида

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

която има най-висока алгебрична степен на точност. Колко е тази алгебрична степен на точност?

Упътване. За пресмятане на интегралите използвайте смяната $x = \sin(t)$.

Юли 2008г.

Задача 1. Дадена е функцията $f(x) = x^5 - 8x^2 - 4$.

а) Да се докаже, че уравнението $f(x) = 0$ има единствен положителен корен ξ , и да се намери интервал с дължина 1, съдържащ ξ .

б) Да се докаже, че редицата $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, зададена посредством итерационния процес

$$x_0 = 2, \quad x_{n+1} = 2 + \frac{4}{x_n^2(x_n^2 + 2x_n + 4)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

клони към ξ при $n \rightarrow \infty$, и за всяко естествено число n е изпълнено неравенството

$$|x_n - \xi| \leq \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8^{n-1}}$$

Задача 2. Дискретна случайна величина X има разпределение

X	2,5	5	10	11	19
p_x	0,2	0,3	0,3	0,1	0,1

а) За случайната величина X намерете математическото очакване $\mu = E(X)$ и дисперсията $\sigma^2 = V(X) = D(X)$.

б) За получените стойности на μ и σ^2 намерете $\min\{\mu x_1 + (\sigma^2 - 2,95)x_2\}$ при ограничителни условия

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Септември 2008г.

Задача 1. Да се реши диференциалното уравнение $x^2 y'' - 2y = \sin(\ln(x))$.

Задача 2.

а) Случайната величина U е равномерно разпределена върху интервала $[3; 5]$. Случайната величина V е положителна и $P(V > x) = e^{-2x}$. Намерете математическото очакване и дисперсията на случайната величина $X = 3U - 2V$, при условие че U и V са независими.

б) Случайната величина X е абсолютно непрекъсната със средна стойност $E(X) = a$, дисперсия $D(X) = b^2$ и функция на разпределение $F(x)$. Намерете математическото очакване и дисперсията на случайната величина Z , определена с равенството $Z = -\ln(1 - F(X))$.

Март 2009г.

Задача 1. Нека $f(z) = \frac{e^{i\pi z}}{z^2 - 4z + 5}, z \in \mathbb{C}$.

а) Да се пресметне

$$\int_{|z|=R} f(z) dz$$

при $0 < R \leq 2$ и $R \geq 3$.

б) Да се докаже, че

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

където $C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$.

в) Да се пресметне

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 - 4x + 5} dx.$$

Задача 2. Дадена е функцията $f(x) = x - 6 \sin(x)$.

а) Да се докаже, че уравнението $f(x) = 0$ притежава единствен положителен корен ξ , и да се намери интервал с дължина $\frac{\pi}{4}$, който съдържа ξ .

б) Да се докаже, че итерационният процес

$$\begin{aligned} x_0 &= \pi \\ x_{n+1} &= \frac{\pi}{2} + \arccos\left(\frac{x_n}{6}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

е сходящ към ξ , и да се намери оценка от вида

$$|x_n - \xi| \leq Cq^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

където C и q са положителни константи и $q < 1$.

Юли 2009г.

Задача 1. Да се пресметне с теоремата за резидуумите интегралът

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin(x)}{x^2+2x+2} dx.$$

Упътване. Използвайте, че

$$\frac{(x+1)\sin(x)}{x^2+2x+2} = \operatorname{Im} \left(\frac{(x+1)e^{ix}}{x^2+2x+2} \right).$$

Задача 2.

а) Да се намери общото решение на уравнението на Ойлер $L(y) \equiv x^2 y'' + xy' + y = 0$, $x > 0$.

б) Да се намери частното решение на уравнението $L(y) = \ln(x)$.

Септември 2009г.

Задача 1. Да се пресметне интегралът

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Упътване. Използвайте теоремата за резидуумите или методите за интегриране на рационални функции от реалния анализ.

Задача 2. Да се реши уравнението $y'' + 2y' + 10y = e^{-x} \cos(3x)$ с начални условия $y(0) = y'(0) = 0$.

Юли 2010г.

Задача 1.

а) Да се пресметне интегралът

$$\int \frac{1 - \cos(x)}{(5 + 3\cos(x))(5 + 4\cos(x))} dx.$$

б) Намерете онази примитивна $f(x)$ на функцията

$$\frac{1 - \cos(x)}{(5 + 3\cos(x))(5 + 4\cos(x))}$$

в интервала $(-\pi; \pi]$, за която $f(\pi) = 0$.

Задача 2. Да се намери общото решение на уравнението $y'' - y' - 2y = 2e^{-x}$.

Септември 2010г.

Задача 1. Да се пресметне с теоремата за резидуумите интегралът

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

Упътване. Използвайте, че

$$\frac{x \sin(x)}{x^4 + 5x^2 + 4} = \operatorname{Im} \left(\frac{x e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} \right).$$

Задача 2.

а) Да се намери общото решение на уравнението $L(y) \equiv y'' + 4y' + 4y = 0$.

б) Да се намери частното решение на уравнението $L(y) = \frac{e^{-2x}}{x^2}$, $x > 0$.

Юли 2011г.

Задача 1. Спрямо ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на евклидовото пространство V е зададен линеен оператор $\varphi: V \rightarrow V$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намери ортонормиран базис на V , в който матрицата D на φ е диагонална, както и матрицата D .

б) За произволни вектори $v_1, v_2 \in V$ да означим с $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$ скаларното им произведение и да разгледаме множествата

$$M_r = \{v \in V \mid (\varphi(v), v) = r\} \text{ за } r \in \mathbb{R}.$$

Да се докаже, че:

(i) M_0 е обединение на две пресичащи се равнини;

(ii) M_{2011} не пресича единичната сфера $S = \{v \in V \mid \|v\| = \sqrt{(v, v)} = 1\}$.

Задача 2. Дадена е функцията

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{(\cos(x) + \sin(x) + 2)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

а) Намерете примитивните на $f(x)$ в интервала $(-\pi; \pi)$.

б) Намерете примитивните на $f(x)$ върху реалната права.

в) Намерете онази примитивна на $f(x)$, дефинирана върху реалната права, чиято графика минава през координатното начало.

Септември 2011г.

Задача 1. Дадена е линейната задача

$$\max(4 - t)x_1 - 3x_2 + x_3$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 4$$

$$2x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

а) Да се намерят оптималната стойност на целевата функция и множеството от оптимални решения за $t = 0$.

б) Да се изследва изменението на оптималната стойност на целевата функция и на множеството от оптимални решения за стойности на параметъра $t \geq 0$.

Задача 2. Нека

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx,$$

$S(f)$ е елементарната формула на Симпсън, а $Tr_n(f)$ е n -тата съставна формула на трапеците за интеграла $I(f)$.

а) Да се пресметне $I(f)$ при $f(x) = \sin(\pi x^2)$ и $[a; b] = [0; 1]$ по квадратурните формули $S(f)$ и $Tr_2(f)$, които използват трите функционални стойности във възлите $0, \frac{1}{2}$ и 1 .

б) При условията от а) да се оцени грешката от формулата $Tr_n(f)$ и да се намери една стойност на параметъра n , за която тази грешка не надхвърля 10^{-3} .

в) Да се намерят реалните числа λ и μ , така че да е в сила равенството $S(f) = \lambda \cdot Tr_2(f) + \mu \cdot Tr_1(f)$. Вярно ли е по-общото твърдение, че $\lambda \cdot Tr_{2n}(f) + \mu \cdot Tr_n(f)$ е съставна формула на Симпсън?

Юли 2012г.

Задача 1. Да се развие по степените на x функцията

$$f(x) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(x-1)^2}{x^2 + x + 1} \right) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right).$$

Намерете областта на сходимост на получения ред.

Задача 2. Времето на живот в часове на даден вид платки има плътност на разпределение

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{\frac{-y}{100}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

а) Намерете функцията на разпределение и средното време на живот на една платка.

б) Пресметнете вероятността дадена платка да издържи поне 100 часа.

в) Нека Y_1, Y_2 са две независими случайни величини с еднаква функция на разпределение $F(y)$. Докажете, че е в сила $F_{\min\{Y_1, Y_2\}}(y) = 1 - (1 - F(y))^2$.

г) Две платки са свързани в схема, така че схемата спира да работи, ако която и да е платка се развали. Намерете разпределението на случайната величина „живот на схемата“ и намерете средното ѝ време на живот (използвайте в)).

Юли 2013г.

Задача 1. Да разгледаме функцията

$$f(x) = \frac{x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 13x + 7}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}.$$

а) Да се провери дали $x = -1$ е в дефиниционната област на $f(x)$.

б) Да се пресметне

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_{13}^x f(t) dt.$$

в) Да се пресметне

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Задача 2. Дадена е задачата

$$\begin{cases} u'(x) = u^2(x) + x^2, & 0 < x < 1 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

а) Чрез интегриране в интервала $[x_{i-1}; x_{i+1}]$ на уравнението и прилагане към интеграла вдясно на квадратурната формула на Симпсън да се получи диференчен метод за решаване на задачата и да се пресметне локалната грешка на апроксимация.

б) Върху моделната задача

$$\begin{cases} u'(x) = \lambda u(x), & \lambda = \text{const} < 0, x \in (0; X] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

да се изследва устойчивостта и монотонността на диференчния метод

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{3}{4} y'_{i+1} + \frac{1}{4} y'_i$$

където с y_m е означена стойността на дясната част на диференциалното уравнение в точката x_m .

Юли 2014г.

Задача 1. Да се реши определеният интеграл

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

Задача 2. Да се реши диференциалното уравнение

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 5x^3 + \frac{x^2}{\ln^2(x)}, \quad x > 1.$$

Септември 2014г.

Задача 1. Дадена е линейната оптимизационна задача:

$$(P) \begin{cases} \text{да се минимизира} & z(x_1, x_2, x_3) = ax_1 + (a-3)x_2 + a(a+1)x_3 \\ \text{при ограничения} & ax_1 + (a-3)x_2 + (1-a+a^2)x_3 = a-1 \\ & x_1 - 2x_2 + ax_3 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

където a е параметър със стойности различни от едно. За кои стойности на параметъра a е изпълнено:

- а) точката $\bar{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$ е единствен оптимален опорен план на тази задача;
- б) точката $\bar{x} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)^T$ е оптимален опорен план на тази задача, но не е единствен - да се определи общият вид на оптималните планове;
- в) целевата функция намалява неограничено в множеството от допустимите стойности за x_1, x_2 и x_3 ;
- г) има съседен опорен план на задачата, за който целевата функция има по-малка стойност.

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ линейният оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ p & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

зависеща от реален параметър p . Да се пресметнат стойностите на реалния параметър p , за които характеристичният полином $f_\varphi(x)$ на φ изпълнява равенството $f_\varphi(2) = 10$. За получените стойности на p да се намери ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази диагонална матрица D .

Юли 2016г.

Задача 1. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ линейният оператор $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & p \\ 2 & 4 & 0 \\ p & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

а) За кои стойности на реалния параметър p операторът φ има собствена стойност 0? За така намерените стойности на p да се намерят ортонормирани базиси на $\mathbb{R}^3$, в които φ има диагонални матрици D , както и тези матрици D .

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър p , за които характеристичните корени x_1, x_2, x_3 на φ изпълняват равенството $x_1 + x_2 = 2x_3$.

Задача 2. Дадена е моделната задача

$$\begin{aligned} (1) \quad & u'(x) = \lambda u(x), \quad \lambda = \text{const} < 0, \quad x \in (0; X] \\ (2) \quad & u(0) = u_0. \end{aligned}$$

Върху нея:

а) Да се изследва устойчивостта и монотонността на диференчния метод

$$(3) \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \theta y'_{i+1} + (1 - \theta)y'_i, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad y_0 = u_0,$$

където с y_m е означена стойността на приближеното решение на задача (1), (2), получена по метода (3) в точката x_m от равномерната мрежа $\overline{\omega_h} = \{x_i = ih, h = \frac{X}{N}, i = 0, 1, \dots, N\}$, а y'_m е стойността на дясната част на диференциалното уравнение (1) в точката x_m ;

б) Да се намери приближеното решение на задача (1), (2) с помощта на метода (3) при $u_0 = 1, \lambda = -1$,

$X = 1, \theta = 0$, като в интервала $[0; 1]$ се въведе равномерна мрежа със стъпка $h = \frac{h_{\max}}{2}$, където $h_{\max}$ е максималната стъпка, гарантираща устойчивостта и монотонността на метода.

Септември 2016г.

Задача 1. Пресметнете определения интеграл

$$\int_0^{2\pi} \frac{x}{(|\cos(x)| + |\sin(x)|)^2} dx$$

Задача 2. В пространството спрямо ортонормирана координатна система $K = Oxyz$ са дадени правите:

$$m: \begin{cases} x + 2y + 2z - 1 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases}, \quad g: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}.$$

Да се намери оста на правите m и g и дължината на тяхната ос-отсечка.

Юли 2017г.

Задача 1. Спрямо ортонормиран базис g_1, g_2, g_3 на евклидовото пространство V симетричният линейен оператор $\varphi: V \rightarrow V$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Нека L е едномерно линейно подпространство на V , а $U = L^\perp$ е ортогоналното допълнение на L във V . Ако за всеки вектор $v \in L$ е в сила $\varphi(v) \in L$, да се докаже, че за всеки вектор $u \in U$ е изпълнено $\varphi(u) \in U$.

б) Да се намери ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на V , в който φ има диагонална матрица D , както и тази матрица D .

в) Да означим с (u, w) скаларното произведение на вектори $u, w \in V$. Ако $v \in V$ е вектор с дължина $\|v\| = 1$, да се изрази векторът $\varphi(v) - 3v$ и скаларното произведение $(\varphi(v), v)$ чрез координатите на вектора v спрямо базиса e_1, e_2, e_3 .

г) Ако $v_1, v_2 \in V$ са вектори с дължина $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ и $(\varphi(v_1), v_1) = -(\varphi(v_2), v_2)$, да се докаже, че векторите $\varphi(v_1) - 3v_1$ и $\varphi(v_2) - 3v_2$ са колинеарни и да се пресметне $\|\varphi(v_1) - 3v_1\|^2 + \|\varphi(v_2) - 3v_2\|^2$.

Задача 2. Намерете общото решение на уравнението на Ойлер $t^2 \ddot{x} - 2x = 10 \sin(\ln(t))$.

Септември 2017г.

Задача 1. Спрямо афинна координатна система $K = Oxyz$ в реалното тримерно пространство $\mathbb{R}^3$ са дадени кръстосаните прави

$$l: \begin{cases} x = 3 + s \\ y = -1 + 2s \\ z = 4s \end{cases} \quad \text{и} \quad m: \begin{cases} x = -2 + 3p \\ y = -1 \\ z = 4 - 5p \end{cases}.$$

Да се намери трансверсалата t на правите l и m , ако е известно, че t е успоредна на права n с уравнения

$$n: \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}.$$

Задача 2. Като се използват методите на нелинейното оптимизиране да се намери минималната стойност на функцията

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + \frac{1}{2}(y - 2)^2$$

при ограничения $x^2 + y^2 \leq 10$, $x + 2y = 7$, $x \geq 0$.

Юли 2018г.

Задача 1. Да се реши определения интеграл

$$\int_2^4 \frac{dx}{x^2\sqrt{x-1}}.$$

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден триъгълникът ABC , така че уравненията на правите AB и AC са съответно $l: 7x + 4y - 1 = 0$ и $g: 5x + 2y - 5 = 0$. Да се намерят координатите на върховете A, B, C и лицето S на триъгълника ABC , при условие че медианите му пресичат точката $M(1; -1)$.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) := x \ln(x) - 1$. Да се докаже, че уравнението $f(x) = 0$ има единствен реален корен ξ , който лежи в интервала $(1; 2)$. Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редица от последователни приближения на ξ , получена по метода на Нютон за уравнението $f(x) = 0$ при $x_0 = 2$. Да се намери x_1 във вида $\frac{p}{\ln(x)+q}$, където p и q са естествени числа и да се докаже, че $\xi < x_n \leq 2$, $n = 0, 1, \dots$.

Септември 2018г.

Задача 1. Да се реши неопределения интеграл

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

Задача 2. В равнината е въведена декартова координатна система и е даден триъгълникът ABC , така че височините му се пресичат в точката $H(14; 15)$ и уравненията на правите AB и AC са съответно $l: x + 2y - 5 = 0$ и $g: 5x + 4y - 13 = 0$. Да се намерят координатите на точките A, B, C и G – медицентър на триъгълника ABC , както и лицето S_1 на триъгълника ABG .

Задача 3. Нека e_1, e_2, e_3 е стандартният базис в евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ и $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3)$ е линеен оператор, действащ по правилото

$$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3) = (3\xi_1 + 2\xi_2 - 2\xi_3)e_1 + (2\xi_1 + 4\xi_3)e_2 + (-2\xi_1 + 4\xi_2)e_3.$$

а) Да се намери матрицата A на оператора φ в този базис.

б) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на линейния оператор φ е диагонална.

в) Да се напише матрицата на прехода T и диагоналната матрица D на оператора φ .

г) Нека $\psi = \varphi + 5\varepsilon$ е линеен оператор в $\mathbb{R}^3$, където ε е тъждественият оператор. Покажете, че $\text{Ker}(\psi)$ е инвариантно подпространство на $\mathbb{R}^3$ относно ψ и намерете базис на $\text{Ker}(\psi)$.

Юли 2019г.

Задача 1. Даден е полиномът

$$f(x) = x^4 - 6ix^3 + px^2 + qx + 3 \in \mathbb{C}[x]$$

с комплексни коефициенти.

а) Да се намерят стойностите на комплексните параметри p и q , за които корените x_1, x_2, x_3, x_4 , на полинома $f(x)$ изпълняват равенствата

$$x_1 + x_2 = 2(x_3 + x_4) \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = 3x_3 x_4.$$

б) За всеки от полиномите $f(x)$, чиито корени изпълняват двете условия в подточка а), да се пресметне интегралът

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{1}{f(z)} dz$$

по окръжността $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2019\}$.

Задача 2. Спрямо ортонормирана координатна система $K = O\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3$ в реалното тримерно евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ е дадена кривата

$$c : \begin{cases} x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(q) \\ x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(q) \\ x^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} q \end{cases},$$

където $q \in \mathbb{R}$.

а) Да се намери векторът $\vec{t}$, колинеарен с допирателната t в произволна точка на кривата c и да се докаже, че той сключва постоянен ъгъл с оста $O\vec{e}_3$.

б) Да се намерят кривината κ и торзията τ на кривата c .

Септември 2019г.

Задача 1. Разгледайте функцията

$$f(x) = \int_0^x \frac{t-1}{t^2-t-2} dt.$$

Развийте f в степенен ред около нулата. Намерете радиуса му на сходимост.

Задача 2. Дадена е линейната оптимизационна задача

$$(P) \begin{cases} \text{да се минимизира} & z(x_1, x_2, x_3) = (a-1)x_1 - x_2 + a(a-1)x_3 \\ \text{при ограничения} & \begin{aligned} (a-1)x_1 - x_2 + (3-3a+a^2)x_3 &= a-2 \\ x_1 - x_2 + (a-1)x_3 &= 0 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0 \end{aligned} \end{cases} ,$$

където $a \neq 2$.

а) За кои стойности на параметъра a точката $\bar{x} = (1, 1, 0)^T$ е оптимален опорен план на тази задача?

б) Приложете симплекс метода за намиране на оптимален опорен план на тази задача при $a = \frac{3}{2}$.

в) Намерете всички решения на тази задача при $a = \frac{3}{2}$.

г) За кои стойности на параметъра a целевата функция намалява неограничено в множеството от допустимите стойности за x_1, x_2 и x_3 ?

Август 2020г.

Задача 1. Да се пресметнат интегралите:

а)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^\alpha} dx, \text{ където } \alpha \text{ е реално число.}$$

б)

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{(\sin(x) + \cos(x))^2} dx.$$

Задача 2. Нека $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ е ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ и $\varphi \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4)$ е линейен оператор, действащ по правилото:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4) = & \\ (\alpha \xi_1 + 2\xi_2 - 2\xi_3 + 3\xi_4)e_1 + & \\ (2\xi_1 + \alpha \xi_2 + 3\xi_3 - 2\xi_4)e_2 + & \\ (-2\xi_1 + 3\xi_2 + \alpha \xi_3 + 2\xi_4)e_3 + & \\ (3\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3 + \alpha \xi_4)e_4, & \end{aligned}$$

където $\alpha \geq 0$ е реален параметър.

а) Да се намери матрицата A на оператора φ в този базис.

б) Да се намери стойността на параметъра α , за която характеристичните корени x_1, x_2, x_3, x_4 на оператора φ удовлетворяват зависимостите $x_1 = x_2$, $x_3 < x_4$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 2x_4$.

в) Да се намери ортонормиран базис от собствени вектори $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на линейния оператор φ е диагонална.

г) Да се напише матрицата на прехода $T_{e \rightarrow v}$ и диагоналната матрица D на оператора φ .

д) Да се пресметне A^{2020} .

Забележка: Подусловия в), г) и д) да се решават за намерената в подусловие б) стойност на α .

Септември 2020г.

Задача 1. В равнината е въведена декартова координатна система Oxy и е даден триъгълникът ABC .

Известно е, че върхът A на триъгълника има координати $(2,4)$, височината h_B на триъгълника, минаваща през върха B има уравнение $x + y - 2 = 0$, а ъглополовящата l_C на вътрешния ъгъл на триъгълника при върха C има уравнение $3x + y - 4 = 0$.

а) Да се намерят координатите на върховете B и C .

б) Да се намери лицето на триъгълника ABC .

Задача 2. Да се пресметне интегралът

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 + 4}{x^4 - 8x^2 + 16} dx.$$