

КОНСПЕКТ
ЗА
ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА
ОБРАЗОВАТЕЛНО-КВАЛИФИКАЦИОННА
СТЕПЕН „БАКАЛАВЪР”

СПЕЦИАЛНОСТ
„МАТЕМАТИКА”

Промените в конспекта за ДИ са приети с
решения на ФС: протокол № 02/28.02.2022 г.

СЪДЪРЖАНИЕ

УКАЗАНИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕТО НА ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ	3
КОНСПЕКТ ЗА ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА СПЕЦИАЛНОСТ „МАТЕМАТИКА”	4
АНОТАЦИИ НА ВЪПРОСИТЕ	5
ЛИТЕРАТУРА	14

УКАЗАНИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕТО НА ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНО-КВАЛИФИКАЦИОННА СТЕПЕН „БАКАЛАВЪР”

СПЕЦИАЛНОСТ „МАТЕМАТИКА”

При явяване на държавен изпит всеки студент е длъжен да носи студентската си книжка, да се яви навреме пред предварително оповестената зала и да спазва указанията на квесторите за настаняване в залата.

Държавният изпит по специалност „Математика” е в две части, които се провеждат в два дни. През първия ден изпитът е практически (решаване на задачи). Към въпроси с номера от 1 до 8 и от 10 до 18, могат да бъдат дадени задачи. Втория ден изпитът е теоретичен. Изтегля се един въпрос и се развива писмено. Работите се предават и се прави кратка почивка. Тегли се втори въпрос, който също се развива писмено.

По време на всяка една част от изпита листата за писане са осигурени и подпечатани от ФМИ, други не се внасят. Пише се само с химикал - задължително син или черен цвят. Молив може да се използва само за чертежи.

По време на изпита може да се използва официално издадено копие на конспекта (получава се от квесторите). Всички други пособия са забранени.

Забранено е използването на електронни устройства от всякакъв вид. Необходимо е всички внесени мобилни устройства и компютърна техника да бъдат изключени преди започване на изпита и да бъдат оставени на определените за целта места. Намирането при студентите на нерегламентирани помощни средства се счита за опит за преписване. По време на изпита не се водят разговори, не се пуши и не се излиза от залата.

Работите се оценяват от комисия. Практическият и теоретичният изпит се оценяват поотделно. При положение, че и на двата изпита оценката е по-голяма или равна на 3.00, то крайната оценка от държавния изпит е закръглената по правилата средно аритметична оценка от двата изпита. В противен случай оценката е слаб (2.00). Оценката се закръгля до втори знак след десетичната запетая. Оценките са окончателни и не подлежат на преразглеждане.

Според правилника на СУ студентите нямат право на явяване за повишаване на оценка от ДИ, ако той е бил успешно положен. Напомняме на студентите, че според ЗВО за продължаване на образованието в ОКС „Магистър” (**срещу заплащане**) е необходима оценка най-малко „добър” от дипломата за ОКС „Бакалавър”.

КОНСПЕКТ ЗА ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА СПЕЦИАЛНОСТ „МАТЕМАТИКА”

1. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли.
2. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.
3. Неразложими полиноми над поле. Разлагане на полином на неразложими множители над поле. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.
4. Теорема на Ферма. Теорема за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.
5. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон-Лайбниц.
6. Степенни редове. Област и радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.
7. Непрекъснатост и диференцируемост на функция на няколко променливи. Локален екстремум. Теорема за диференциране на композиция на изображения.
8. Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.
9. Холморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.
10. Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.
11. Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе.
12. Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.
13. Уравнение на струната. Задача на Коши. Метод на характеристиките.
14. Теорема за пълнота на предикатното смятане от първи ред.
15. Минимизация на детерминирани крайни автомати.
16. Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.
17. Задача на линейното оптимизиране. Основни теореми.
18. Случайни величини с дискретни разпределения – дискретно равномерно, биномно, геометрично, поасоново разпределения. Задачи, в които възникват.
19. Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.

АНОТАЦИИ НА ВЪПРОСИТЕ

1. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли.

Векторни и параметрични (скалярни) уравнения на права и равнина. Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Ъгъл между прави. Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.

Литература: [25].

2. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Симетричен оператор – определение, матрица на симетричен оператор спрямо ортонормиран базис. Всички характеристични корени на симетричен оператор са реални числа; всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си; съществува ортонормиран базис на пространството, в който матрицата на симетричен оператор е диагонална.

Примерна задача: За даден симетричен оператор да се намерят ортонормиран базис на пространството, в който матрицата му е диагонална, както и самата матрица.

Литература: [21].

3. Неразложими полиноми над поле. Разлагане на полином на неразложими множители над поле. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.

Теорема за еднозначно разлагане на неразложими множители. Критерий на Айзенщайн. Полето на комплексните числа е алгебрически затворено. Следствия - всеки полином с комплексни коефициенти се разлага в произведение на линейни множители; всеки полином с реални коефициенти се разлага в произведение на линейни и квадратни множители; формули на Виет за полином от степен n .

Примерни задачи: Неразложимост на полиноми. Прилагане на формулите на Виет за полином с числови коефициенти.

Литература: [24].

4. Теорема на Ферма. Теорема за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

Да се дефинира понятието локален екстремум на функция на една променлива. Да се формулира и докаже необходимо условие за локален екстремум за диференцируеми функции (теорема на Ферма).

Да се докажат следните теореми, формулирани общо за по-кратко.

Нека функцията f е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a, b) . Да се докаже, че:

а) ако $f(a) = f(b)$, то съществува $c \in (a, b)$ такава, че $f'(c) = 0$ (Рол);

б) съществува $c \in (a, b)$ такава, че $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (Лагранж);

в) ако функцията g е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a, b) , като $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, то съществува $c \in (a, b)$ такава, че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\text{Коши}).$$

По отношение на твърдението във в) да се докаже, че при направените в него предположения имаме $g(a) \neq g(b)$.

За установяването на теоремата на Рол може да се използва без доказателство теоремата на Вайерщрас, според която всяка непрекъсната функция върху краен затворен интервал достига своите максимум и минимум.

Да се изведе формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж.

Литература: [14], [16], [17], [27], [28].

5. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон-Лайбниц.

Да се дефинират последователно: разбиване на интервал, големи и малки суми на Дарбу. Да се установи, че при добавяне на нови точки в разбиването на интервала, големите суми на Дарбу не нарастват, а малките не намаляват (желателно е да се направи чертеж). Да се дефинира риманов интеграл чрез подхода на Дарбу.

Да се докаже, че дадена функция е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват голяма сума на Дарбу S и малка сума на Дарбу s такива, че $S - s < \varepsilon$. Като се използва тази теорема и теоремата на Кантор (без доказателство), според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната, да се докаже, че всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман.

Да се изброят (без доказателство) основните свойства на римановия интеграл. Да се докаже, че ако f е непрекъсната в $[a, b]$, то съществува $c \in [a, b]$ такава, че

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

За установяването на това твърдение да се приложат (без доказателство) свойството за интегриране на неравенства и теоремата, че всяка непрекъсната функция в $[a, b]$ приема всички стойности между максимума и минимума си.

Да се докаже теоремата на Нютон-Лайбниц, т.е. ако f е непрекъсната в $[a, b]$, то за всяко $x \in [a, b]$ е изпълнено

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

Да се покаже как теоремата се използва за изчисляване на определени интеграли.

Литература: [14], [16], [17], [27], [28].

6. Степенни редове. Област и радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.

Да се дефинира степенен ред на реална променлива и област на сходимост на такъв ред. Да се докаже, че областта на сходимост е интервал. Да се дефинира понятието радиус на сходимост на степенен ред. Да се докаже, че радиусът на сходимост R удовлетворява формулата

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

където a_n са коефициентите на степенния ред. Ако $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то се счита, че горната формула определя R като $+\infty$, а ако $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то се счита, че $R = 0$.

Като се използва формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, да се развият в степенен ред при реални стойности на x около точката 0 функциите e^x , $\sin x$ и $(1+x)^\alpha$, където $\alpha \in \mathbb{R}$. За целта да се намерят стойностите на всички производни на тези функции при $x = 0$. Да се определи радиусът на сходимост на тези степенни редове.

Литература: [14], [16], [17], [27], [28].

7. Непрекъснатост и диференцируемост на функция на няколко променливи. Локален екстремум. Теорема за диференциране на композиция на изображения.

Да се даде дефиниция за непрекъснатост в точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ на функция $f(x, y)$, дефинирана в околност на (x_0, y_0) . Да се даде дефиниция за частни производни.

Една функция $f(x, y)$ се нарича диференцируема в точка (x_0, y_0) , ако в околност на тази точка тя се представя като

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + r(x, y),$$

където $a, b \in \mathbb{R}$, $r(x, y) = o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$, т.е.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{r(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Да се покаже, че ако $f(x, y)$ е диференцируема в (x_0, y_0) , то е изпълнено

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = b.$$

Да се покаже, че ако $f(x, y)$ е диференцируема в точката (x_0, y_0) , то тя е непрекъсната в тази точка.

Да се докаже, че ако функцията $f(x, y)$ е дефинирана и притежава частни производни в околност на точката (x_0, y_0) и ако тези частни производни са непрекъснати в (x_0, y_0) , то $f(x, y)$ е диференцируема в тази точка. За установяването на това да се използва (без доказателство) теоремата на Лагранж за средните стойности.

Да се даде дефиниция за локален екстремум и да се изведе необходимото условие една функция да има такъв в точка (x_0, y_0) .

Да се формулира и докаже правилото за диференциране на композиция на изображения (верижното правило)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\psi}{dt},$$

където $f(x, y)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са диференцируеми и където $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$.

Литература: [14], [16], [17], [18], [27], [28].

8. Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.

Да се даде дефиниция за параметрично зададена крива в равнината и да се дефинира дължината ѝ. За параметрично зададена, гладка, равнинна крива да се:

- (а) изведе формулата за дължината;
- (б) дефинират криволинейните интеграли от първи и от втори род;
- (в) изведат формулите за свеждане на криволинейните интеграли от двата рода към риманови интеграли.

Да се докаже формулата на Грийн

$$\int_{\partial D} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) dxdy,$$

в случая когато $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ е криволинеен трапец и $Q(x,y)$ е тъждествено равна на нула, като за целта се използва (без доказателство) формулата на Нютон-Лайбниц.

Литература: [14], [16], [17], [27], [28].

9. Холморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.

Да се дефинират: $\mathbb{R}$ -диференцируемост, $\mathbb{C}$ -диференцируемост и холморфност на функция на комплексна променлива. Да се докаже, че уравнението на Коши-Риман и $\mathbb{R}$ -диференцируемостта са необходими и достатъчни за $\mathbb{C}$ -диференцируемост. Да се дефинира конформно изображение и да се докаже, че ако $f(z)$ е холморфна в z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0 . Да се формулира основната теорема на Коши за едносвързана област и да се докаже само за триъгълен контур. Да се докаже формулата на Коши. За доказателството ѝ да се използва наготово (без доказателство) теоремата на Коши за сложен контур.

Задачи: Възстановяване на холморфна функция по дадена реална (имагинерна) част.

Примерни задачи: 1. Да се намери холморфна функция $f(z) = u + iv$, за която

а) $u(x,y) = x^2 - y^2 - e^y \sin x$;

б) $u(x,y) = \varphi(x^2 - y^2)$, където $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е двукратно гладка функция.

Литература: [3], [4], [6].

10. Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.

Да се докаже теоремата на Лоран за развитие в ред на функция холморфна във венец. Да се дефинират трите вида изолирани особени точки: отстранима, полюс и съществена особена точка и да се докажат: теоремата на Риман (за отстранима особена точка) и теоремата на Казорати-Вайерщрас – Сохоцки. Да се дефинира резидуум на холморфна функция в изолирана особена точка и да се докаже теоремата за резидуумите.

Задачи: Определяне вида на изолираните особени точки на холморфна функция и пресмятане на резидуумите в тях. Пресмятане чрез теоремата за резидуумите на контурни интеграли и на реални несобствени интеграли.

Примерни задачи:

1. Да се определи видът на изолираните особени точки в $\bar{\mathbb{C}}$ на функцията

$$f(z) = \frac{z^3 \sin \frac{1}{z}}{1-z}$$

и да се пресметнат резидуумите в тях.

2. Да се пресметнат:

$$\int_{|z|=2} \frac{ze^z}{z+1} dz; \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}; \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin \pi x}{x^2+2x+5} dx; \int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)(x^2+x+1)} dx$$

Литература: [3], [4], [6].

11. Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе.

Векторна функция на скаларен аргумент – дефиниция и свойства. Линии - дефиниция и свойства. Дължина на дъга. Естествен параметър на линия. Триедър и формули на Френе на линия в пространството. Кривина и торзия. Инварианти на линия.

Примерна задача: Нека $c: x = x(s), s \in J$ е поне петкратно гладка правилна крива, за която s е естествен параметър. Разглеждаме кривите $c_0: x_0 = \int b ds$ и $\bar{c}: \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x_0$, където b е бинормалата на кривата c .

а) Да се докаже, че ако кривата c има постоянна кривина κ , то кривата c_0 има постоянна торзия τ_0 ;

б) Да се докаже, че ако кривата c има постоянна кривина κ , то кривината $\bar{\kappa}$ и торзията $\bar{\tau}$ на кривата $\bar{c}$ удовлетворяват равенството $\varepsilon \bar{\kappa} + \bar{\tau} - \sqrt{2}\kappa = 0$, където $\varepsilon = \operatorname{sgn}\left(\frac{\kappa - \tau}{\sqrt{2}}\right)$;

$$c: \begin{cases} x^1 = \cos(q) \\ x^2 = \sin(q), q \in R \\ x^3 = q \end{cases}$$

в) В случая, когато

да се пресметнат торзията τ_0 на кривата c_0 и кривината $\bar{\kappa}$ на кривата $\bar{c}$.

Литература: [25], [26].

12. Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.

Разглежда се диференциалното уравнение от n -ти ред

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

където $a_j(t)$ са непрекъснати функции. Формулира се (без доказателство) теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. Дава се критерий за линейна независимост на система от n решения на хомогенното уравнение чрез детерминантата на Вронски. Дефинира се понятието фундаментална система от решения и се доказва, че решенията на хомогенното уравнение (т.е. $f(t) \equiv 0$) образуват n -мерно линейно пространство. Описва се структурата на решенията на нехомогенното уравнение.

Формулира се алгоритъм за намиране на общото решение на уравнението с постоянни коефициенти $a_j \in R$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0.$$

Примерни задачи:**I. Линейни ДУ с променливи коефициенти:**

1. Да се намери общото решение на уравнението, като се намери негово частно решение във вида $y_1 = e^{bx}$ или $y_1 = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$:
 - а) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1$;
 - б) $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0, \quad x > 0$.

II. Линейни ДУ с постоянни коефициенти. Уравнения на Ойлер:

1. Да се намерят реалните решения на уравнението:
 - а) $y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x$;
 - б) $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$;
 - в) $y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}, \quad x > 0$.
2. Да се реши задачата на Коши:
 - а) $y''' + y' = x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1$;
 - б) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$.
3. Да се реши уравнението на Ойлер:
 - а) $x^3 y'' - 2xy = 6 \ln x$;
 - б) $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x, \quad x > 0$.
4. Да се покаже, че уравнението $y' + y = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ има единствено решение, ограничено в $-\infty < x < +\infty$. Да се намери това решение.

Литература: [9], [23], [30].

13. Уравнение на струната. Задача на Коши. Метод на характеристиките.

Формулира се задачата на Коши за уравнението на струната

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Дефинира се понятието “характеристика”. Извежда се формулата на Даламбер.

Примерна задача: Да се определи най-голямата област, в която поставената задача на Коши има единствено решение. Да се намери това решение.

1. $xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0, \quad u|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \quad u_x|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2, \quad x > 0$.
2. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0, \quad u|_{x=1} = y, \quad u_x|_{x=1} = y^2, \quad y < 0$.
3. $4y^2 u_{xx} + 4yu_{xy} + u_{yy} + 2u_x = 0, \quad u|_{y=0} = 9 \sin x, \quad u_y|_{y=0} = e^x, \quad -\infty < x < \infty$.

Литература: [10], [21], [30].

14. Теорема за пълнота на предикатното смятане от първи ред.

Дефинира се понятието стандартна структура за теория от първи ред. Дефинира се понятието хенкинова теория. Доказва се, че всяка теория има консервативно хенкиново разширение. Формулира се теоремата на Линденбаум (без доказателство). Доказва се,

че всяка непротиворечива теория има модел. Формулира се и се доказва теоремата за пълнота.

Примерна задача:

Нека T е теория от първи ред над езика с нелогически символи $0, 1, +$ и $\cdot$, която има нелогически аксиоми

1. 0 е различно от 1
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$
3. $x+0=x$
4. $x+y=y+x$
5. $x(yz)=(xy)z$
6. $x \cdot 1=x$
7. $xy=yx$
8. $x(y+z)=xy+xz$

Вариант 1: Определете стандартната структура за T .

Вариант 2: Докажете, че стандартната структура за T е изоморфна на N .

Литература: [20].

15. Минимизация на детерминирани крайни автомати.

Дефиниции за краен автомат и автоматен език. Еквивалентни автомати. Детерминирани и тотални автомати. Недостижими и неразличими (еквивалентни) състояния. Дефиниция за минимален автомат. Намиране на минимален автомат, еквивалентен на даден тотален детерминиран автомат. Дясна полуконгруентност относно даден език и нейното приложение към въпроса за единственост (с точност до изоморфизъм) на минималния автомат, еквивалентен на даден тотален детерминиран автомат.

Описание на задачите. Задачи за минимизация на конкретно даден тотален детерминиран автомат (т.е. за намиране на минимален автомат, еквивалентен на дадения).

Примерна задача: Да се минимизира тоталният детерминиран автомат над азбуката $\{0, 1\}$, имащ състояния A, B, C, D, E, F, G , където A е началното състояние, C и E са заключителните, а преходите се определят с помощта на следната таблица:

	A	B	C	D	E	F	G
0	B	B	D	D	B	C	F
1	D	C	E	E	C	G	E

Литература: [29], [11], [12], [19].

16. Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.

Да се дефинира понятието неподвижна точка на изображението φ и да се докаже, че ако φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си, то φ има поне една неподвижна точка в $[a, b]$. Да се покаже, че решаването на уравнението $f(x) = 0$ може да се сведе към намиране на неподвижна точка.

Да се дефинира понятието свиващо изображение и да се докаже, че ако φ е непрекъснато изображение на интервала $[a, b]$ в себе си и е свиващо с константа на Липшиц $q < 1$, то: а) уравнението $x = \varphi(x)$ има единствен корен ξ в $[a, b]$; б) редицата

$\{x_n\}$ от последователни приближения (при произволно $x_0 \in [a, b]$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, $n = 0, 1, \dots$) клони към ξ при $n \rightarrow \infty$, като $|x^n - \xi| \leq (b-a)q^n$ за всяко n . Да се получи като следствие, че ако ξ е корен на уравнението $x = \varphi(x)$ и φ има непрекъсната производна в околност U на ξ , за която $|\varphi'(\xi)| < 1$, то при достатъчно добро начално приближение x_0 итерационният процес, породен от φ , е сходящ със скоростта на геометрична прогресия. Да се дефинира понятието ред на сходимост. Да се дадат геометрична илюстрация, формула за последователните приближения и ред на сходимост при: метод на хордите, метод на секущите и метод на Нютон. Да се докаже, че при метода на хордите сходимостта е със скоростта на геометричната прогресия (при условие, че коренът е отделен в достатъчно малък интервал).
Литература: [1], [7], [22].

17. Задача на линейното оптимиране. Основни теореми.

Задача на линейното оптимиране в общ вид. Канонична форма. Канонично многостенно множество. Върхове и посоки. Алгебрични характеристики на върховете и посоките на канонично многостенно множество (без доказателство). Теорема за представяне на елементите на канонично многостенно множество (без доказателство). Основни теореми на линейното оптимиране за канонична линейна задача.

Примерни задачи: Да се реши със симплекс метода дадената задача. Ако задачата е разрешима да се намери оптималната стойност на целевата функция и множеството от оптимални решения.

$$\max z(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$2x_1 - x_2 = -3,$$

$$x_1 - x_3 \leq 1,$$

$$x_1 + 4x_3 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$$\min z(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2$$

$$-2x_1 + x_2 \leq 4,$$

$$-x_1 + x_2 \geq -2,$$

$$3x_1 + x_2 \leq 22,$$

$$x_1 \geq 0.$$

$$\min z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3$$

$$-2x_1 - x_2 + x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_3 = 1,$$

$$3x_1 + x_3 + x_5 = 4,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

$$\max z(\mathbf{x}) = -2x_1 - 6x_2$$

$$4x_1 + 2x_2 \geq -9,$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 6,$$

$$-3x_1 + 7x_2 \leq 61.$$

Литература: [5, стр. 65 – 77], [31, Записки по Математическо оптимиране-1].

18. Случайни величини с дискретни разпределения – дискретно равномерно, биномно, геометрично, поасоново разпределения. Задачи, в които възникват.

На изпита комисията дава две разпределения, върху които се развива въпросът. Дефиниция на дискретно разпределение на случайна величина. Свойства на вероятностите (неотрицателност и нормираност). Дефиниция на моментите на разпределението и връзката им с математическото очакване и дисперсия. Дефиниция на пораждаща функция (или по избор на студента – на пораждаща функция на моментите, характеристична функция). Свойства на пораждащата функция (пораждащата ф-я на моментите, характеристичната функция) – без доказателства. За дадените две

разпределения да се посочи пример (задача), при който то възниква, да се изведе пораждащата функция (пораждащата функция на моментите или характеристичната функция) и да се пресметнат математическото очакване (със и без пораждаща ф-я, пораждаща функция на моментите или характеристична функция) и дисперсията им (методът на пресмятане се избира от студента).

Литература: [13], глави 2.3 (стр. 54 – 56), 3.2 (стр. 71 – 74), 6.1 (примери 1 – 4); [8], тема: Дискретни разпределения.

19. Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.

Постановка на задачата за брахистохроната като задача за най-бързо преместване на несвободна материална точка в потенциално силово поле (хомогенното поле на силата на тежестта) по предварително неизвестна крива. Интеграл на енергията. Интерпретация на задачата като вариационна задача за екстремум на функционал. Извод на уравнението на Ойлер като необходимо условие за екстремум на функционала. Основна лема на вариационното смятане. Циклоидата като решение на задачата за брахистохроната.

Литература: [15], [9], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев, А., и др. Сборник от задачи по числени методи. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1994.
2. Анчев, А., Л. Лилов, Ст. Радев. Лекции по аналитична механика, I ч. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1988.
3. Аргирова, Т. Теория на аналитичните функции. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1992.
4. Аргирова, Т., Т. Генчев. Сборник от задачи по теория на аналитичните функции. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1992.
5. Базара, М., К. Шетти. Нелинейное программирование. Мир, Москва, 1982.
6. Бояджиев П., В. Хаджийски, Комплексен анализ - Ръководство, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 2004.
7. Боянов, Б. Лекции по числени методи. Дарба, София, 1998.
8. Въндев, Д. Записки по теория на вероятностите. Електронно издание: <https://store.fmi.uni-sofia.bg/fmi/statist/personal/vandev/lectures/prob/Prob.htm>
9. Генчев, Т. Обикновени диференциални уравнения, III изд. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1999.
10. Генчев, Т. Частни диференциални уравнения. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1999.
11. Денев, Й., Р. Павлов, Я. Деметровиц. Дискретна математика, Наука и изкуство, София, 1984.
12. Денев Й., С. Щраков. Дискретна математика. ЮЗУ „Неофит Рилски“, Благоевград, 1995.
13. Димитров, Б., Н. Янев. Вероятности и статистика. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1990.
14. Дойчинов, Д. Математически анализ. Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1994.
15. Долапчиев, Бл. Аналитична механика, II изд. Наука и изкуство, София, 1966.
16. Илин, В., В. Садовничи, Бл. Сендов. Математически анализ, ч. I. Наука и изкуство, София, 1984.
17. Илин, В., В. Садовничи, Бл. Сендов. Математически анализ, ч. II. Наука и изкуство, София, 1989.
18. Леви, Р., Диференциално и интегрално смятане на функции на няколко променливи, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София 2015, ISBN 978-954-07-3899-4
19. Манев, К. Увод в дискретната математика. Издателство на НБУ, София, 1996 (I изд.), 1998 (II изд.).
20. Математическая логика, Дж. Шенфилд, изд. Наука Москва, 1975г.
21. Попиванов П., Попиванов Н., Йорданов Й., Ръководство за упражнения по ЧДУ, Университетско издателство „Св. Климент Охридски“, София, 1996.

22. Сендов, Бл., В. Попов. Числени методи, ч. I. Университетско издателство „Св. Климент Охридски”, София, 1996.
23. Сидеров, Пл., Чакърян, К., Записки по алгебра: линейна алгебра, Веди, София, 2014.
24. Сидеров, Пл., Чакърян, К., Записки по алгебра: групи, пръстени, полиноми, Веди, София, 2014.
25. Станилов, Гр. Аналитична геометрия. Софтех, София, 1998.
26. Станилов, Гр. Диференциална геометрия. Тилия, София, 1997.
27. Тагамлици, Я. Диференциално смятане. Наука и изкуство, София, 1978.
28. Тагамлици, Я. Интегрално смятане. Наука и изкуство, София, 1978.
29. Rabin, M. O., D. Scott. Finite automata and their decision problems. IBM J. Res. Devel., 3 (1959), № 2, 114 – 125. Руски превод: Рабин, М. О., Д. Скотт. Конечные автоматы и задачи их разрешения. Кибернетический сборник (старая серия), вып. 4, Иностранная литература, Москва, 1962, 56 – 91.
30. <https://intranet.fmi.uni-sofia.bg/index.php/s/cAylCqjjMe4Lk7Q>
31. <http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/or/mo.htm>