СОФИЙСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. КЛ. ОХРИДСКИ“

ФАКУЛТЕТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

КОНСПЕКТ

ЗА

ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ ЗА ЗАВЪРШВАНЕ НА

ОБРАЗОВАТЕЛНО – КВАЛИФИКАЦИОННА

СТЕПЕН „БАКАЛАВЪР“

СПЕЦИАЛНОСТ

„МАТЕМАТИКА“

Промените в конспектите за ДИ са приети с
решение на ФС – Протокол № 05/29.05.2017 г.

СОФИЯ • 2018

При явяване на държавен изпит всеки студент е длъжен да носи студентската си книжка, да се яви навреме пред предварително оповестената зала и да спази указанията на квесторите за настаняване в залата.

Държавният изпит по специалност *„Математика“* е в две части, които се провеждат в два дни. През първия ден изпитът е практически (решаване на задачи) с продължителност 3 астрономически часа. Към въпроси с номера от 1 до 8 и от 10 до 18, могат да бъдат дадени задачи. Втория ден изпитът е теоретичен. Изтегля се един въпрос и се развива за 2 астрономически часа. Работите се предават и се прави кратка почивка. Тегли се втори въпрос, който също се развива за 2 часа.

По време на всяка една част от изпита листата за писане са осигурени и подпечатани от ФМИ, други не се внасят. Пише се само с химикал - задължително син или черен цвят. Молив може да се използва само за чертежи.

По време на изпита може да се използва официално издадено копие на конспекта (получава се от квесторите). Всички други пособия са забранени.

Забранено е използването на електронни устройства от всякакъв вид. Необходимо е всички внесени мобилни устройства и компютърна техника да бъдат изключени преди започване на изпита и да бъдат оставени на определените за целта места. Намирането при студентите на нерегламентирани помощни средства се счита за опит за преписване. По време на изпита не се водят разговори, не се пуши и не се излиза от залата.

Работите се оценяват от комисия. Практическият и теоретичният изпит се оценяват поотделно. При положение, че и на двата изпита оценката е по-голяма или равна на 3.00, то крайната оценка от държавния изпит е закръглената по правилата средно аритметична оценка от двата изпита. В противен случай оценката е слаб (2.00). Оценката се закръгля до втори знак след десетичната запетая. Оценките са окончателни и не подлежат на преразглеждане.

Според правилника на СУ студентите нямат право на явяване за повишаване на оценка от ДИ, ако той е бил успешно положен. Напомняме на студентите, че според ЗВО за продължаване на образованието в ОКС „Магистър“ **(срещу заплащане)** е необходима оценка най-малко „добър“ от дипломата за ОКС „Бакалавър“.

КОНСПЕКТ ЗА ДЪРЖАВЕН ИЗПИТ
ЗА СПЕЦИАЛНОСТ „МАТЕМАТИКА“

1. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли.
2. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.
3. Неразложими полиноми над поле. Разлагане на полином на неразложими множители над поле. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.
4. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.
5. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон – Лайбниц.
6. Степенни редове. Радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.
7. Непрекъснатост и диференцируемост на функции на много променливи. Теорема за диференциране на съставна и неявна функция.
8. Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.
9. Холоморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.
10. Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.
11. Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе.
12. Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.
13. Уравнение на струната. Задача на Коши. Метод на характеристиките.
14. Теорема за пълнота на предикатното смятане от първи ред.
15. Минимизация на детерминирани крайни автомати.
16. Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.
17. Задача на линейното оптимиране. Основни теореми.
18. Случайни величини с дискретни разпределения – дискретно равномерно, биномно, геометрично, поасоново разпределения. Задачи, в които възникват.
19. Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.

АНОТАЦИИ НА ВЪПРОСИТЕ

1. Уравнения на права и равнина. Формули за разстояния и ъгли.

Векторни и параметрични (скаларни) уравнения на права и равнина. Общо уравнение на права в равнината. Декартово уравнение. Взаимно положение на две прави. Нормално уравнение на права. Разстояние от точка до права. Ъгъл между прави.

Общо уравнение на равнина. Взаимно положение на две равнини. Нормално уравнение на равнина. Разстояние от точка до равнина.

Литература: [24].

2. Симетрични оператори в крайномерни евклидови пространства. Основни свойства. Теорема за диагонализация.

Симетричен оператор – определение, матрица на симетричен опреатор спрямо ортонормиран базис. Всички характеристични корени на симетричен оператор са реални числа; всеки два собствени вектора, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални помежду си; съществува ортонормиран базис на пространството, в който матрицата на симетричен оператор е диагонална.

Примерна задача: За даден симетричен оператор да се намерят ортонормиран базис на пространството, в който матрицата му е диагонална, както и самата матрица.

Литература: [22].

3. Неразложими полиноми над поле. Разлагане на полином на неразложими множители над поле. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа. Следствия. Формули на Виет.

Теорема за еднозначно разлагане на неразложими множители. Критерий на Айзенщайн.Полето на комплексните числа е алгебрически затворено. Следствия - всеки полином с комплексни коефициенти се разлага в произведение на линейни множители; всеки полином с реални коефициенти се разлага в произведение на линейни и квадратни множители; формули на Виет.

Примерни задачи: Неразложимост на полиноми. Прилагане на формулите на Виет за полином с числови коефициенти.

Литература: [23].

4. Теореми за средните стойности (Рол, Лагранж и Коши). Формула на Тейлър.

Необходимо е да се докажат следните теореми, формулирани общо за по-кратко.

Нека f е непрекъсната в затворения интервал $[a,b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a,b). Да се докаже, че:

а) ако $f(a) = f(b)$, то съществува $c \in (a, b)$, така че $f'(c) = 0$ (Рол);

б) съществува $c \in (a, b)$, така че $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (Лагранж);

в) ако g е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$ и притежава производна поне в отворения интервал (a, b), $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, то съществува $c \in (a, b)$, така че

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \text{(Коши).}$$

За доказателството на теоремата на Рол (а) да се използва (без доказателство!) теоремата на Вайерщрас, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал достига своя максимум и минимум.

Необходимо е още да се изведе формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж и Коши.

Примерни задачи. Нека $f(t) = a(1 - t)\cos at - \sin at$, където a е произволно фиксирано реално число:

а) да се пресметне $\int_0^x f(t)dt;$

б) като се използва теоремата на Рол, да се докаже, че уравнението $f(t)$ = 0 има
поне един корен в интервала (0,1).

Литература: [14], [16], [17], [26], [27].

5. Определен интеграл. Дефиниция и свойства. Интегруемост на непрекъснатите функции. Теорема на Нютон – Лайбниц.

Да се дефинират последователно: разбиване на интервал, диаметър на разбиване, риманова сума и риманов интеграл. Да се покаже, че всяка интегруема по Риман функция е ограничена. Да се дефинират големи и малки суми на Дарбу. Да се установи, че при добавяне на нови точки в разбиването на интервала големите суми на Дарбу не нарастват, а малките не намаляват (желателно е да се направи чертеж).

Да се докаже, че дадена функция е интегруема по Риман тогава и само тогава, когато за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват голяма сума на Дарбу S и малка сума на Дарбу s такива, че $S - s < \varepsilon$. Като се използва тази теорема и теоремата на Кантор, според която всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е равномерно непрекъсната, да се докаже, че всяка непрекъсната функция в краен и затворен интервал е интегруема по Риман. Да се изброят (без доказателство) основните свойства на Римановия интеграл. Като се приложи свойството за интегриране на неравенства и теоремата, че всяка непрекъсната функция приема всички стойности между максимума и минимума си, да се докаже, че ако *f* е непрекъсната в [*a, b*], то съществува $c \in [a, b]$, така че

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Като се използва този факт, да се докаже теоремата на Нютон – Лайбниц, т.е. че ако *f* е непрекъсната в [*a, b*], то за всяко $x \in [a, b]$

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x),$$

и да се покаже как тя се използва за изчисляване на определен интеграл.

Примерни задачи. Смяна на променливите и интегриране по части; интегриране на рационални функции; интеграли от вида

$$\int_b^c \frac{dx}{(x^2+y^2)^2};$$

субституции за интегриране на рационални функции от sin *x* и cos *x*; субституции на Ойлер.

Литература: [14], [16], [17], [26], [27].

6. Степенни редове. Радиус на сходимост. Развитие на елементарните функции в степенен ред.

Да се дефинира степенен ред на комплексна променлива и област на сходимост на такъв ред. Да се докаже, че ако един степенен ред е сходящ за някое комплексно число $z_0 \in \mathbb{C}$, то той е абсолютно сходящ за всяко друго *z* при $|z| < |z_0|$. Да се докаже, че областта на сходимост е кръг с радиус $R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$, където a_n са коефициентите на степенния ред.

Като се използва формулата на Тейлър с остатъчен член във формата на Лагранж, да се развият в степенен ред при реални стойности на *x* функциите e^x, sin *x*, cos *x*. За целта да се намерят стойностите на всички производни на тези функции при $x = 0$.

Литература: [14], [16], [17], [26], [27].

7. Непрекъснатост и диференцируемост на функции на много променливи. Теорема за диференциране на съставна и неявна функция.

Дефиниция на непрекъснатост в точката (x_0, y_0) на функцията $f(x, y)$, дефинирана в околност на (x_0, y_0); дефиниция на частни производни. Известно е, че $f(x, y)$ се нарича диференцируема в точката (x_0, y_0), ако е в сила представянето $f(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \alpha(x, y)$, където *a* и *b* са реални числа, а $\alpha(x, y) = o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$, т.е.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{\alpha(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Да се покаже, че ако *f* е диференцируема в (x_0, y_0), то $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Да се докаже следната

Теорема. Нека $f(x, y)$ е дефинирана и притежава частни производни по *x* и *y* в околност на точката (x_0, y_0), като тези частни производни са непрекъснати в точката (x_0, y_0). Тогава $f(x, y)$ е диференцируема в точката (x_0, y_0).

За доказателството на теоремата да се използва (без доказателство) теоремата на Лагранж за средните стойности.

Формулировка и доказателство при какви предположения е в сила равенството

$$(*) \qquad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\psi}{dt},$$

където $F(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$.

Понятие за неявна функция *y* = *y* (*x*), определена чрез уравнението $f(x, y) = 0$. Ако неявната функция $y(x)$ съществува в околност на точката (x_0, y_0), да се намери $y'(x_0)$, при условие че $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ са непрекъснати в околност на точката (x_0, y_0), $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Задачи за екстремуми на функции на две и повече променливи. Двойни и тройни интеграли.

Литература: [14], [16], [17], [26], [27].

8. Криволинейни интеграли върху равнинни криви. Формула на Грийн.

Дефиниция на гладка крива в равнината, зададена параметрично; формула за дължината ѝ. Риманови суми за криволинейни интеграли от първи и втори род и свойствата им. Формули за свеждане на криволинейните интеграли към риманови. Доказателство на формулата на Грийн

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Да се разгледа първо случаят, когато $\overline{D}$ може да се представи във вида $\overline{D} = \left\{ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 \le x \le x_2,\ \ y_1(x) \le y \le y_2(x) \right\}$, а функцията $Q\ (x,\ y)$ е тъждествено нула, и да се покаже, че горната формула следва от формулата на Лайбниц – Нютон. Да се обясни накратко как от този частен случай се извежда общият случай.

Литература: [14], [16], [17], [26], [27].

9. Холоморфни функции. Основна теорема на Коши. Формула на Коши.

Да се дефинират: $\mathbb{R}$ - диференцируемост, $\mathbb{C}$ - диференцируемост и холоморфност на функция на комлексна променлива. Да се докаже, че уравнението на Коши-Риман и $\mathbb{R}$ - диференцируемостта са необходими и достатъчни за $\mathbb{C}$ - диференцируемост. Да се дефинира конформно изображение и да се докаже, че ако $f(z)$ е холоморфна в z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то изображението $w = f(z)$ е конформно в z_0. Да се формулира основната теорема на Коши за едносвързана област и да се докаже само за триъгълен контур. Да се докаже формулата на Коши. За доказателството ѝ да се изпозва наготово (без доказателство) теоремата на Коши за сложен контур.

Задачи: Възстановяване на холоморфна функция по дадена реална (имагинерна) част.

Примерни задачи: 1. Да се намери холоморфна функция $f(z) = u + iv$, за която

а) $u(x, y) = x^2 - y^2 - e^y \sin x$;

б) $u(x, y) = \varphi(x^2 - y^2)$, където $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е двукратно гладка функция.

Литература: [3], [4], [6].

10. Ред на Лоран. Теорема за резидуумите.

Да се докаже теоремата на Лоран за развитие в ред на функция холоморфна във венец. Да се дефинират трите вида изолирани особени точки: отстранима, полюс и съществена особена точка и да се докажат: теоремата на

Риман (за отстранима особена точка) и теоремата на Казорати-Вайерщрас – Сохоцки. Да се дефинира резидуум на холоморфна функция в изолирана особена точка и да се докаже теоремата за резидуумите.

Задачи: Определяне вида на изолираните особени точки на холоморфна функция и пресмятане на резидуумите в тях. Пресмятане чрез теоремата за резидуумите на контурни интеграли и на реални несобствени интеграли.

Примерни задачи:

1. Да се определи видът на изолираните особени точки в $\overline{\mathbb{C}}$ на функцията

$$f(z) = \frac{z^3 \sin\frac{1}{z}}{1-z}$$ и да се пресметнат резидуумите в тях.

2. Да се пресметнат:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{z+1}dz \;;\; \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)} \;;\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx \;;\; \int\limits_0^{\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x^2+x+1)}dx$$

.

Литература: [3], [4], [6].

11. Дължина на дъга. Естествена параметризация на крива. Кривина и торзия. Формули на Френе.

Векторна функция на скаларен аргумент – дефиниция и свойства. Линии - дефиниция и свойства. Дължина на дъга. Естествен параметър на линия. Триедър и формули на Френе на линия в пространството. Кривина и торзия. Инварианти на линия.

Примерна задача: Нека $c : x = x(s), s \in J$ е поне петкратно гладка правилна крива, за която s е естествен параметър. Разглеждаме кривите $c_0 : x_0 = \int b ds$ и $\bar{c} : \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}x_0$, където b е бинормалата на кривата c.

а) Да се докаже, че ако кривата c има постоянна кривина κ, то кривата c_0 има постоянна торзия τ_0;

б) Да се докаже, че ако кривата c има постоянна кривина κ, то кривината $\bar{\kappa}$ и торзията $\bar{\tau}$ на кривата $\bar{c}$ удовлетворяват равенството $\varepsilon\bar{\kappa} + \bar{\tau} - \sqrt{2}\kappa = 0$, където $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\frac{\kappa - \tau}{\sqrt{2}})$;

в) В случая, когато $c : \begin{cases} x^1 = \cos(q) \\ x^2 = \sin(q), q \in R \\ x^3 = q \end{cases}$

да се пресметнат торзията τ_0 на кривата c_0 и кривината $\bar{\kappa}$ на кривата $\bar{c}$.

Литература: [24], [25].

12. Линейни обикновени диференциални уравнения. Уравнения с постоянни коефициенти.

Разглежда се диференциалното уравнение от n-ти ред

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)x = f(t), \quad t \in (\alpha, \beta),$$

където $a_j(t)$ са непрекъснати функции. Формулира се (без доказателство) теорема за съществуване и единственост на решението на задачата на Коши. Дава се критерий за линейна независимост на система от n решения на хомогенното уравнение чрез детерминантата на Вронски. Дефинира се понятието фундаментална система от решения и се доказва, че решенията на хомогенното уравнение (т.е. $f(t) \equiv 0$) образуват n -мерно линейно пространство. Описва се структурата на решенията на нехомогенното уравнение.

Формулира се алгоритъм за намиране на общото решение на уравнението с постоянни коефициенти $a_j \in R$

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0.$$

Примерни задачи:

I. Линейни ДУ с променливи коефициенти:

1. Да се намери общото решение на уравнението, като се намери негово частно решение във вида $y_1 = e^{bx}$ или $y_1 = x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n$:
   а) $x(x-1)y'' - xy' + y = 0, \qquad x > 1$;
   б) $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0, \qquad x > 0.$

II. Линейни ДУ с постоянни коефициенти. Уравнения на Ойлер:

1. Да се намерт реалните решения на уравнението:
   а) $y^{IV} + y'' = 7x - 3\cos x$;
   б) $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x, \quad |x| < \dfrac{\pi}{2}$;
   в) $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}, \quad x > 0.$
2. Да се реши задачата на Коши:
   а) $y''' + y' = x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 1;$
   б) $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0.$
3. Да се реши уравнението на Ойлер:
   а) $x^3 y'' - 2xy = 6\ln x$;

б) $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x, \quad x > 0.$

4. Да се покаже, че уравнението $y' + y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ има единствено решение, ограничено в $-\infty < x < +\infty$. Да се намери това решение.

Литература: [10], [20], [29].

13. Уравнение на струната. Задача на Коши. Метод на характеристиките.

Формулира се задачата на Коши за уравнението на струната

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = f(x), \qquad u_t(x,0) = g(x).$$

Дефинира се понятието “характеристика”. Извежда се формулата на Даламбер.

Примерна задача. Да се определи най-голямата област, в която поставената задача на Коши има единствено решение. Да се намери това решение.

1. $xu_{xx} + (x+y)u_{xy} + yu_{yy} = 0, \quad u\big|_{y=\frac{1}{x}} = x^3, \quad u_x\big|_{y=\frac{1}{x}} = 2x^2, \quad x > 0.$
2. $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} - 2yu_y = 0, \quad u\big|_{x=1} = y, \quad u_x\big|_{x=1} = y^2, \quad y < 0.$
3. $4y^2 u_{xx} + 4yu_{xy} + u_{yy} + 2u_x = 0, \quad u\big|_{y=0} = 9\sin x, \quad u_y\big|_{y=o} = e^x, \quad -\infty < x < \infty.$

Литература: [9], [22], [29].

14. Теорема за пълнота на предикатното смятане от първи ред.

Дефинира се понятието стандартна структура за теория от първи ред. Дефинира се понятието хенкинова теория. Доказва се, че всяка теория има консервативно хенкиново разширение. Формулира се теоремата на Линденбаум (без доказателство). Доказва се, че всяка непротиворечива теория има модел. Формулира се и се доказва теоремата за пълнота.

Примерна задача:

Нека T е теория от първи ред над езика с нелогически символи 0, 1, + и ., която има нелогически аксиоми

1. 0 е различно от 1
2. x+(y+z)=(x+y)+z
3. x+0=x
4. x+y=y+x
5. x(yz)=(xy)z
6. x.1=x
7. xy=yx
8. x(y+z)=xy+xz

Вариант 1: Определете стандартната структура за T.

Вариант 2: Докажете, че стандартната структура за T е изоморфна на N.

Литература: [19].

15. Минимизация на детерминирани крайни автомати.

Дефиниции за краен автомат и автоматен език. Еквивалентни автомати. Детерминирани и тотални автомати. Недостижими и неразличими (еквивалентни) състояния. Дефиниция за минимален автомат. Намиране на минимален автомат, еквивалентен на даден тотален детерминиран автомат. Дясна полуконгруентност относно даден език и нейното приложение към въпроса за единственост (с точност до изоморфизъм) на минималния автомат, еквивалентен на даден тотален детерминиран автомат.

Описание на задачите. Задачи за минимизация на конкретно даден тотален детерминиран автомат (т.е. за намиране на минимален автомат, еквивалентен на дадения).

Примерна задача. Да се минимизира тоталният детерминиран автомат над азбуката {0, 1}, имащ състояния *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, където *A* е началното състояние, *C* и *E* са заключителните, а преходите се определят с помощта на следната таблица:

	A	B	C	D	E	F	G
0	B	B	D	D	B	C	F
1	D	C	E	E	C	G	E

Литература: [28], [11], [12], [18].

16. Итерационни методи за решаване на нелинейни уравнения.

Да се дефинира понятието *неподвижна точка* на изображението φ и да се докаже, че ако φ е непрекъснато изображение на интервала [*a, b*] в себе си, то φ има поне една неподвижна точка в [*a, b*]. Да се покаже, че решаването на уравнението $f(x) = 0$ може да се сведе към намиране на неподвижна точка.

Да се дефинира понятието *свиващо изображение* и да се докаже, че ако φ е непрекъснато изображение на интервала [*a, b*] в себе си и е свиващо с константа на Липшиц $q < 1$, то: а) уравнението $x = \varphi(x)$ има единствен корен ξ в [*a, b*]; б) редицата $\{x_n\}$ от последователни приближения (при произволно $x_0 \in [a,b]$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n),\ n = 0,1,\ldots$) клони към ξ при $n \to \infty$, като $\left|x^n - \xi\right| \le (b-a)q^n$ за всяко *n*. Да се получи като следствие, че ако ξ е корен на уравнението $x = \varphi(x)$ и φ има непрекъсната производна в околност *U* на ξ, за която $|\varphi'(\xi)| < 1$, то при достатъчно добро начално приближение x_0 итерационният процес, породен от φ, е сходящ със скоростта на геометрична прогресия. Да се дефинира понятието *ред на сходимост.*

Да се дадат геометрична илюстрация, формула за последователните приближения и ред на сходимост при: метод на хордите, метод на секущите и метод на Нютон. Да се докаже, че при метода на хордите сходимостта е със скоростта на геометричната прогресия (при условие, че коренът е отделен в достатъчно малък интервал).

Литература: [1], [7], [21] .

17. Задача на линейното оптимиране. Основни теореми.

Задача на линейното оптимиране в общ вид. Канонична форма. Канонично многостенно множество. Върхове и посоки. Алгебрични характеризации на върховете и посоките на канонично многостенно множество (без доказателство). Теорема за представяне на елементите на канонично многостенно множество (без доказателство). Основни теореми на линейното оптимиране за канонична линейна задача.

Примерни задачи: Да се реши със симплекс метода дадената задача. Ако задачата е разрешима да се намери оптималната стойност на целевата функция и множеството от оптимални решения.

$$\max z(\mathbf{x}) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$$
$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 = -3,\\ &x_1 - x_3 \le 1,\\ &x_1 + 4x_3 \le 4,\\ &x_1 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{aligned}$$

$$\min z(\mathbf{x}) = -3x_1 - x_2$$
$$\begin{aligned} &-2x_1 + x_2 \le 4,\\ &-x_1 + x_2 \ge -2,\\ &3x_1 + x_2 \le 22,\\ &x_1 \ge 0. \end{aligned}$$

$$\min z(\mathbf{x}) = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3$$
$$\begin{aligned} &-2x_1 - x_2 + x_4 = 3,\\ &x_1 - x_3 = 1,\\ &3x_1 + x_3 + x_5 = 4,\\ &x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{aligned}$$

$$\max z(\mathbf{x}) = -2x_1 - 6x_2$$
$$\begin{aligned} &4x_1 + 2x_2 \ge -9,\\ &x_1 + 3x_2 \ge 6,\\ &-3x_1 + 7x_2 \le 61. \end{aligned}$$

Литература: [5, стр. 65 – 77], [30, Записки по Математическо оптимиране-1].

18. Случайни величини с дискретни разпределения – дискретно равномерно, биномно, геометрично, поасоново разпределения. Задачи, в които възникват.

На изпита комисията дава две разпределения, върху които се развива въпросът. Дефиниция на дискретно разпределение на случайна величина. Свойства на вероятностите (неотрицателност и нормираност). Дефиниция на моментите на разпределението и връзката им с математическото очакване и дисперсия. Дефиниция на пораждаща функция (или по избор на студента – на пораждаща функция на моментите, характеристична функция). Свойства на пораждащата функция (пораждащата ф-я на моментите, характеристичната функция) – без доказателства. За дадените две разпределения да се посочи пример (задача), при който то възниква, да се изведе пораждащата функция (пораждащата функция на моментите или характеристичната функция) и да се пресметнат математическото очакване (със и без пораждаща ф-я, пораждаща функция на моментите или характеристична функция) и дисперсията им (методът на пресмятане се избира от студента).

Литература: [13], глави 2.3 (стр. 54 – 56), 3.2 (стр. 71 – 74), 6.1 (примери 1 – 4); [8], тема: Дискретни разпределения.

19. Задача за брахистохроната. Механично тълкуване.

Постановка на задачата за брахистохроната като задача за най-бързо преместване на несвободна материална точка в потенциално силово поле (хомогенното поле на силата на тежестта) по предварително неизвестна крива. Интеграл на енергията. Интерпретация на задачата като вариационна задача за екстремум на функционал. Извод на уравнението на Ойлер като необходимо условие за екстремум на функционала. Основна лема на вариационното смятане. Циклоидата като решение на задачата за брахистохроната.

Литература: [15], [9], [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев,А., и др. Сборник от задачи по числени методи. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
2. Анчев, А., Л. Лилов, Ст. Радев. Лекции по аналитична механика, I ч. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1988.
3. Аргирова, Т. Теория на аналитичните функции. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1992.
4. Аргирова, Т., Т. Генчев. Сборник от задачи по теория на аналитичните функции. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1992.
5. Базара, М., К. Шетти. Нелинейное программирование. Мир, Москва, 1982.

6. Бояджиев П., В. Хаджийски, Комплексен анализ - Ръководство, Университетско издателство „Св. Кл. Охридски”, София, 2004.
7. Боянов, Б. Лекции по числени методи. Дарба, София, 1998.
8. Въндев, Д. Записки по теория на вероятностите. Електронно издание: http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/statist/personal/vandev/lectures/prob/prob.htm
9. Генчев, Т. Обикновени диференциални уравнения, III изд. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1999.
10. Генчев, Т. Частни диференциални уравнения. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1999.
11. Денев, Й., Р. Павлов, Я. Деметрович. Дискретна математика, Наука и изкуство, София, 1984.
12. Денев Й., С. Щраков. Дискретна математика. ЮЗУ "Неофит Рилски", Благоевград, 1995.
13. Димитров, Б., Н. Янев. Вероятности и статистика. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1990.
14. Дойчинов, Д. Математически анализ. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1994.
15. Долапчиев, Бл. Аналитична механика, II изд. Наука и изкуство, София, 1966.
16. Илин, В., В. Садовничи, Бл. Сендов. Математически анализ, ч. I. Наука и изкуство, София, 1984.
17. Илин, В., В. Садовничи, Бл. Сендов. Математически анализ, ч. II. Наука и изкуство, София, 1989.
18. Манев, К. Увод в дискретната математика. Издателство на НБУ, София, 1996 (I изд.), 1998 (II изд.).
19. Математическая логика, Дж. Шенфилд, изд. Наука Москва,1975г.
20. Попиванов П., Попиванов Н., Йорданов Й., Ръководство за упражнения по ЧДУ, Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1996.
21. Сендов, Бл., В. Попов. Числени методи, ч. I. Университетско издателство “Св. Кл. Охридски”, София, 1996.
22. Сидеров, Пл., Чакърян, К., Записки по алгебра: линейна алгебра, Веди, София, 2014.
23. Сидеров, Пл., Чакърян, К., Записки по алгебра: групи, пръстени, полиноми, Веди, София, 2014.
24. Станилов, Гр. Аналитична геометрия. Софтех, София, 1998.
25. Станилов, Гр. Диференциална геометрия. Тилия, София, 1997.
26. Тагамлицки, Я. Диференциално смятане. Наука и изкуство, София, 1978.
27. Тагамлицки, Я. Интегрално смятане. Наука и изкуство, София, 1978.
28. Rabin, M. O., D. Scott. Finite automata and their decision problems. *IBM J. Res. Devel.*, **3** (1959), № 2, 114 – 125. Руски превод: Рабин, М. О., Д. Скотт. Конечные автоматы и задачи их разрешения. Кибернетический сборник (старая серия), вып. **4**, Иностранная литература, Москва, 1962, 56 – 91.
29. http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/diff_equ/exams.html
30. http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/or/mo.htm