

Факултет по математика и информатика
СУ "Св. Климент Охридски"

Държавен изпит – ОКС "Бакалавър"
специалност "Математика"

05 август 2020 г.

Задача 1.

Да се пресметнат интегралите:

а)

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^\alpha} dx, \quad \text{където } \alpha \text{ е реално число,}$$

б)

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{(\sin x + \cos x)^2} dx.$$

Факултет по математика и информатика
СУ "Св. Климент Охридски"

Държавен изпит – ОКС "Бакалавър"

специалност "Математика"

05 август 2020 г.

Задача 2.

Нека $e = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ е ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ и $\varphi \in Hom(\mathbb{R}^4)$ е линеен оператор, действащ по правилото:

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 + \xi_4 e_4) = \\ (\alpha \xi_1 + 2\xi_2 - 2\xi_3 + 3\xi_4)e_1 + \\ (2\xi_1 + \alpha \xi_2 + 3\xi_3 - 2\xi_4)e_2 + \\ (-2\xi_1 + 3\xi_2 + \alpha \xi_3 + 2\xi_4)e_3 + \\ (3\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3 + \alpha \xi_4)e_4,\end{aligned}$$

където $\alpha \geq 0$ е реален параметър.

- а) (5 т.) Да се намери матрицата A на оператора φ в този базис.
- б) (5 т.) Да се намери стойността на параметъра α , за която характеристичните корени x_1, x_2, x_3, x_4 на оператора φ удовлетворяват зависимостите $x_1 = x_2$, $x_3 < x_4$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 2x_4$.
- в) (20 т.) Да се намери ортонормиран базис от собствени вектори $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на линейния оператор φ е диагонална.
- г) (5 т.) Да се напише матрицата на прехода $T_{e \rightarrow v}$ и диагоналната матрица D на оператора φ .
- д) (5 т.) Да се пресметне A^{2020} .

Забележка. Подусловия в), г) и д) да се решават за намерената в подусловие б) стойност на α .