

Софийски университет "Свети Климент Охридски"
Факултет по математика и информатика

Държавен изпит
за получаване на ОКС "Бакалавър
специалност "Математика", дата: 11.07.2017 г.

Задача 1.

Спрямо ортонормиран базис g_1, g_2, g_3 на евклидово пространство V симетричният линейен оператор $\varphi : V \rightarrow V$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(а) Нека L е 1-мерно линейно подпространство на V , а $U = L^\perp$ е ортогоналното допълнение на L във V . Ако за всеки вектор $v \in L$ е в сила $\varphi(v) \in L$, да се докаже, че за всеки вектор $u \in U$ е изпълнено $\varphi(u) \in U$.

(б) Да се намери ортонормиран базис e_1, e_2, e_3 на V , в който φ има диагонална матрица D , както и тази матрица D .

(в) Да означим с (u, w) скаларното произведение на вектори $u, w \in V$. Ако $v \in V$ е вектор с дължина $\|v\| = 1$, да се изрази векторът $\varphi(v) - 3v$ и скаларното произведение $(\varphi(v), v)$ чрез координатите на вектора v спрямо базиса e_1, e_2, e_3 .

(г) Ако $v_1, v_2 \in V$ са вектори с дължина $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$ и

$$(\varphi(v_1), v_1) = -(\varphi(v_2), v_2),$$

да се докаже, че векторите $\varphi(v_1) - 3v_1$ и $\varphi(v_2) - 3v_2$ са колинеарни и да се пресметне

$$\|\varphi(v_1) - 3v_1\|^2 + \|\varphi(v_2) - 3v_2\|^2.$$

Задача 2.

Намерете общото решение на уравнението на Ойлер

$$t^2 \ddot{x} - 2x = 10 \sin(\ln t).$$